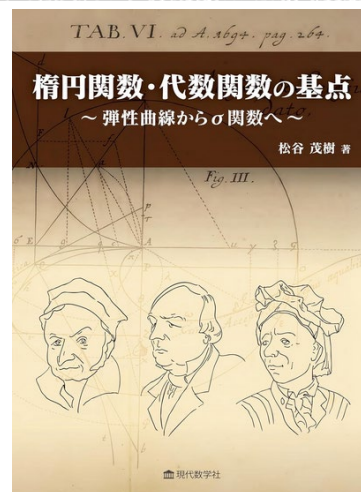
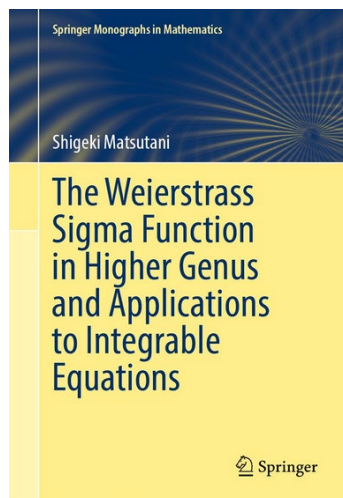


# 楕円関数論の基点： 弾性曲線から $\sigma$ 関数にむけて

第31回 沼津改め静岡研究会  
— 幾何, 複素解析, そして数理物理 —

2026年3月4日

松谷茂樹 / 金沢大学



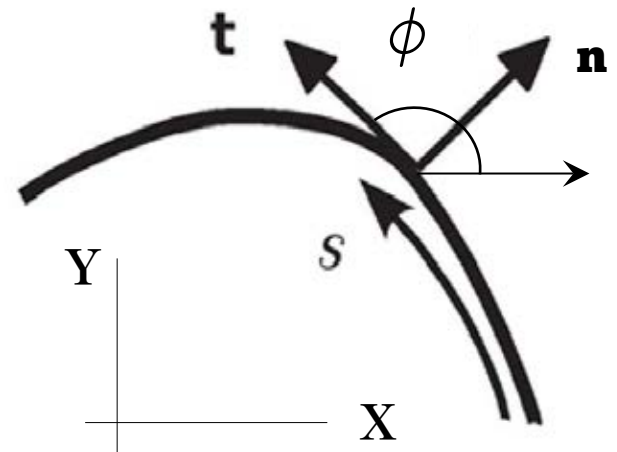
- **本日の話題は本来、懇親会ですのようなものです。**
- **他方、話を少し盛りだくさんにしてしまいました**
- **たいへん申し訳ございませんが、  
ご質問、コメントは、懇親会の際に承りますので、  
少し少なめにしていただけるとたいへん有難いです**
- **ご協力よろしくお願いいたします**



# 弾性曲線 (Elastica) とは

- 弾性力によって定まる平面上の曲線のこと  
(ピアノ線の形状, 紙の丸まり, 梁の形状)

$$k := d\phi / ds : \text{曲率}; \\ = 1 / [\text{曲率半径}].$$



- 弧長不変 (等長変換) の下で

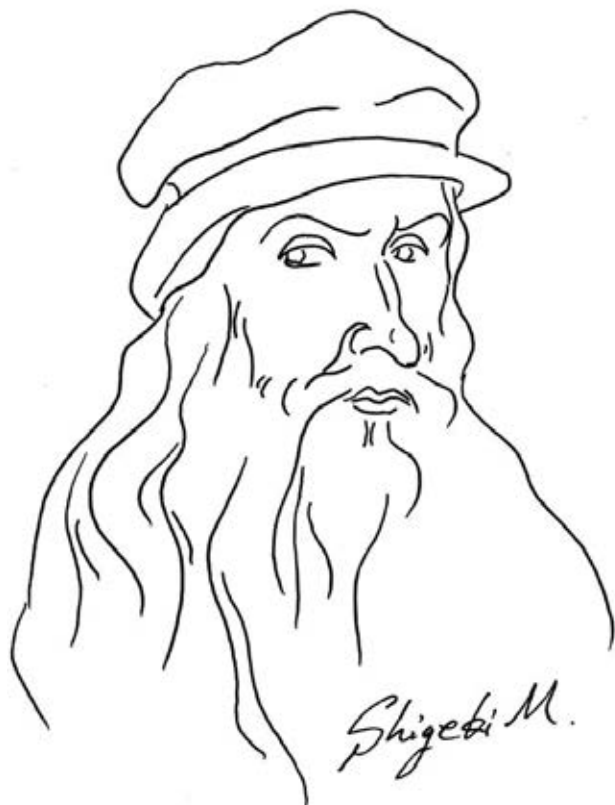
$$\mathcal{E}[Z] = \frac{1}{2} \int_N k(s)^2 ds$$

Euler-Bernoulli  
エネルギー汎関数  
(最古の調和写像)

を最小化する平面曲線の形状のこと



# 弾性曲線の始まり



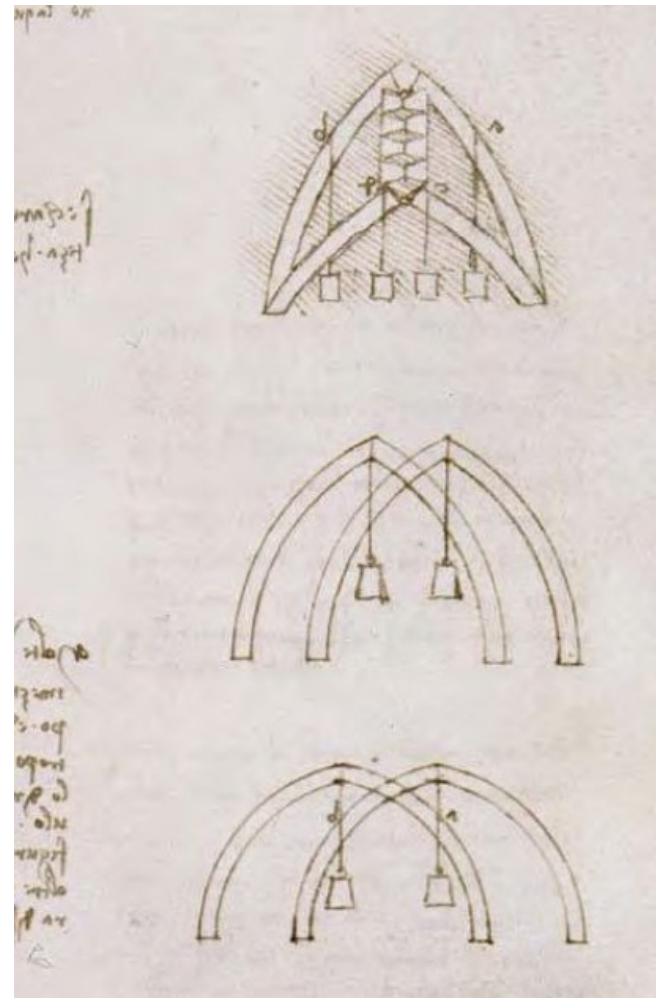
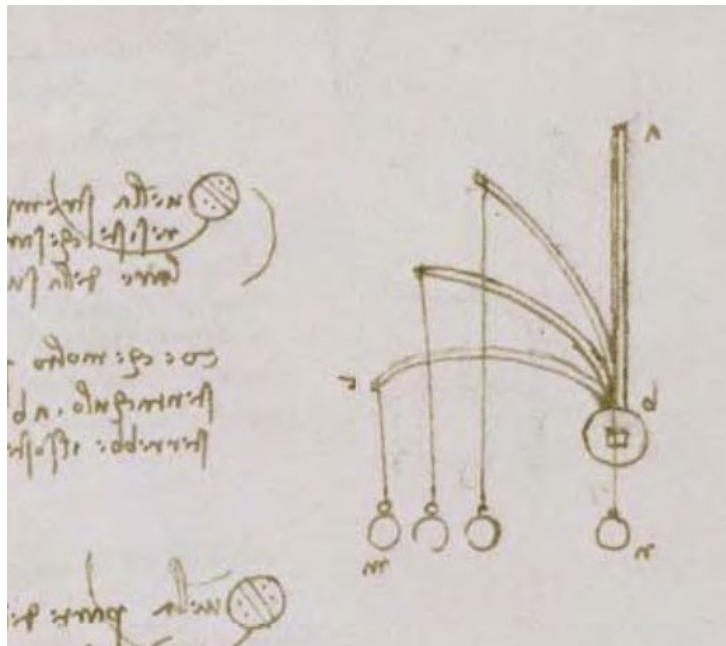
ダ・ヴィンチ (1452-1519)



ダ・ヴィンチ (1452-1519)



da Vinci 1493 曲がった梁のスケッチ(マドリード手稿I より)  
Madrid Codex I, f. 139r (MSS/8937). ©Biblioteca Nacional de Espana



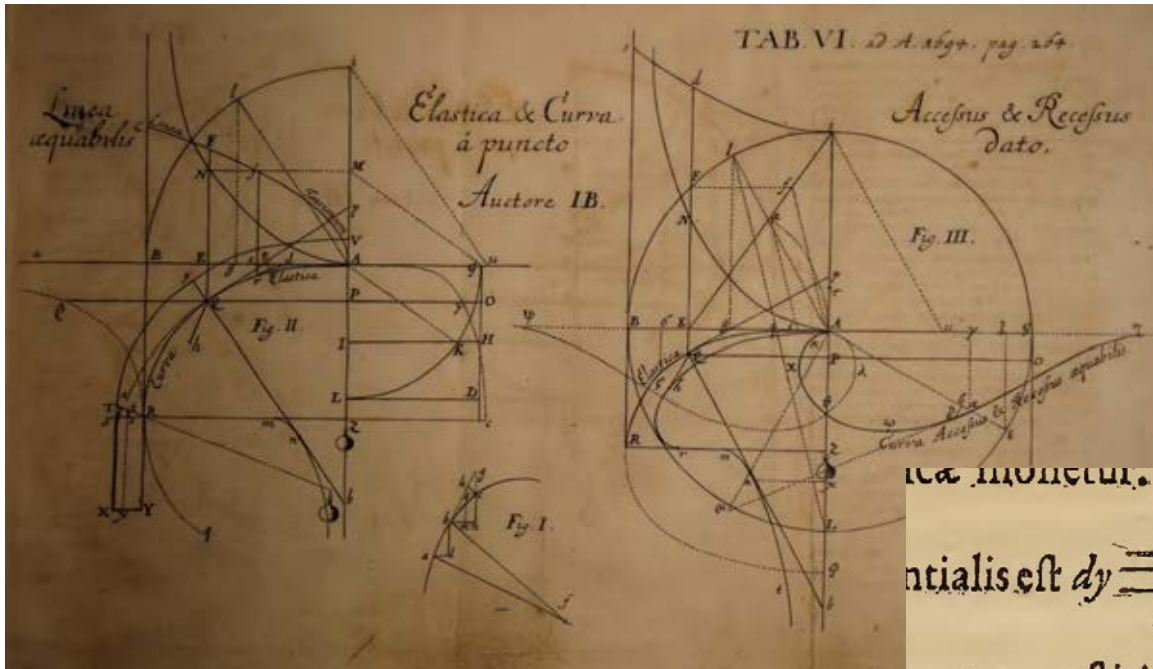


ヤコブ・ベルヌーイ (1654-1705)



Jacob Bernoulli 1691, 弾性曲線 (elastica) 問題の提示：  
 細い弾性棒の形状を数学的に定式化せよ！

Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見  
 等時性パラセントリック曲線により解決



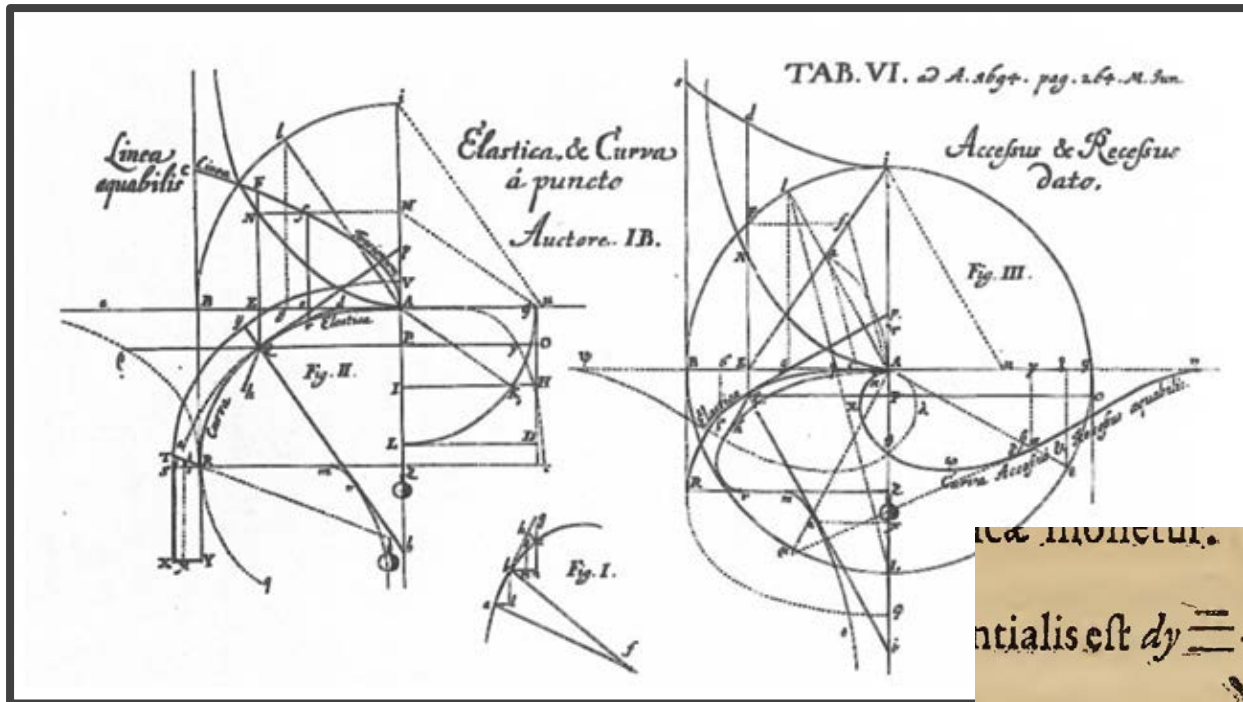
ica moneta. Quocirca si in hoc  
 $xx dx$   
 ntialis est  $dy = \frac{xx dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$  præstan  
 $\sqrt{a^4 - x^4}$   
 metra præstitit in Funicularia. Unde

$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1 - X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1 - X^4}}$$



Jacob Bernoulli 1691, 弾性曲線 (elastica) 問題の提示：  
 細い弾性棒の形状を数学的に定式化せよ！

Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見  
 等時性パラセントリック曲線により解決



...ca monetur. Quocirca si in hoc  
 $xx dx$   
 ntialis est  $dy = \frac{xx dx}{\sqrt{44 - x^4}}$  præstan  
 $\sqrt{44 - x^4}$   
 metra præstitit in Funicularia, in da

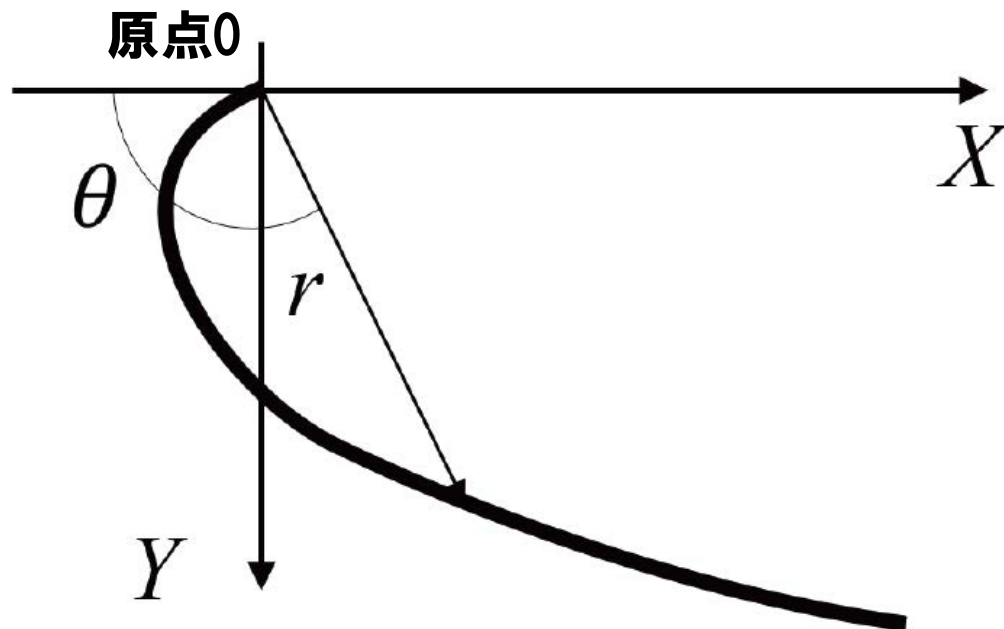
$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1 - X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1 - X^4}}$$



## 等時性パラセントリック曲線 (Leibnizが提唱した問題)

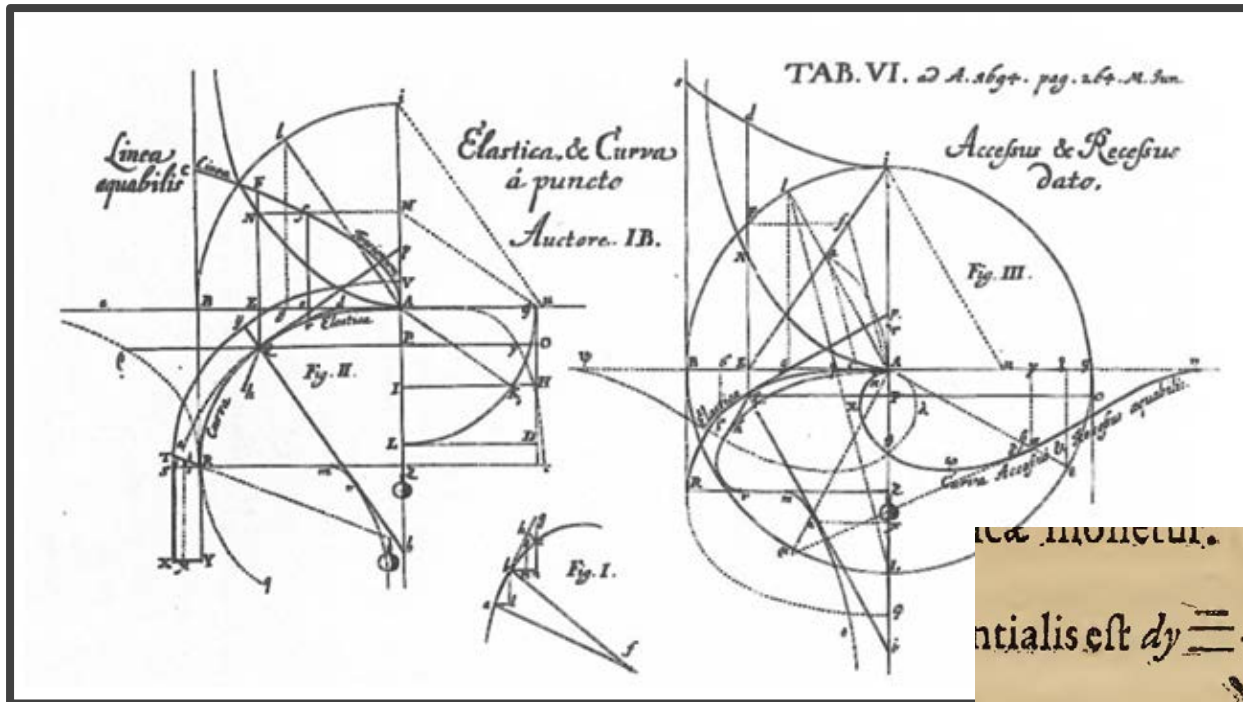
一定の重力が下方にかかる中で、原点0から放たれた粒子が重力に引かれ下降するとともに、粒子の原点0からの距離が時間に比例するとした際の、軌跡を求める問題。

### 錨の運動の数学モデル



Jacob Bernoulli 1691, 弾性曲線 (elastica) 問題の提示：  
 細い弾性棒の形状を数学的に定式化せよ！

Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見  
 等時性パラセントリック曲線により解決

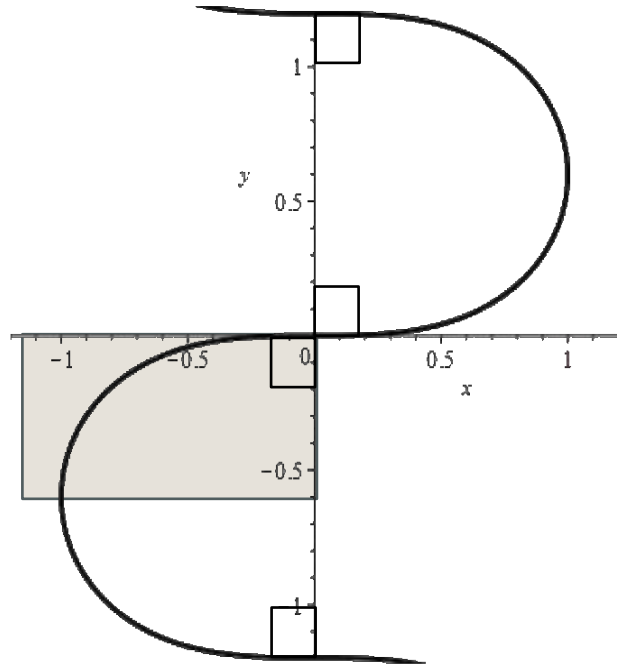
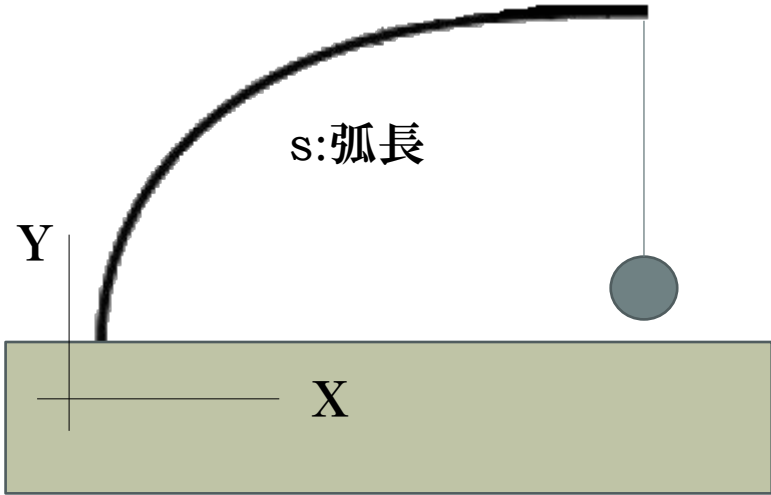


...ca monetur. Quocirca si in hoc  
 $xx dx$   
 ntialis est  $dy = \frac{xx dx}{\sqrt{44 - x^4}}$  præstan  
 $\sqrt{44 - x^4}$   
 metra præstitit in Funicularia, in da

$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1 - X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1 - X^4}}$$



$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1-X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1-X^4}}$$



長方形彈性曲線



# Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見の内容

1.  $xy$ 平面上の曲線の曲率  $\kappa$  を以下で示した ( $s$ は弧長)

$$\kappa = \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds}$$

∴ 接角を  $\phi$  として

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} \sin \phi = \frac{1}{\cos \phi} \cos \phi \frac{d\phi}{ds} = \kappa$$

2. Ansatz 「弾性曲線の  $x$  成分が  $\kappa$  に比例する」の採用

$$\kappa = 2a^2x$$

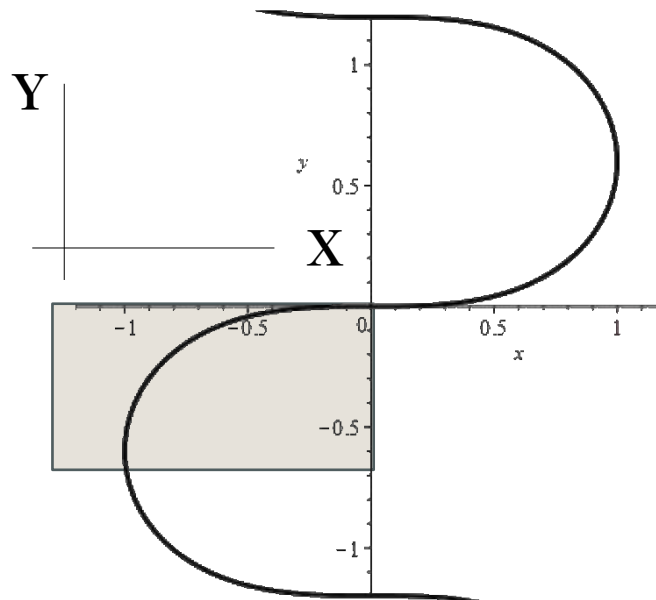
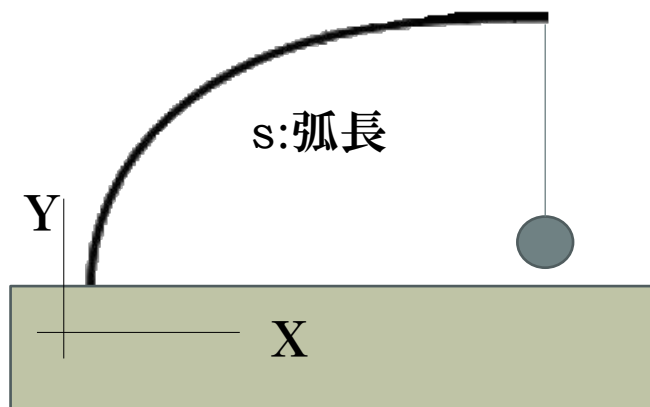
3. 1 & 2 より

$$\rightarrow \frac{dy}{ds} = a^2x^2 \quad \because \int_0^x \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} dx = \int_0^x 2a^2x dx$$

$$\rightarrow dy^2 = (a^4x^4)(dx^2 + dy^2) \quad \because ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\rightarrow (1 - a^4x^4)dy^2 = (a^4x^4)dx^2 \quad \rightarrow dy = \frac{a^2x^2 dx}{\sqrt{1 - a^4x^4}}$$

$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1-X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1-X^4}}$$



Jacob Bernoulli : 導出においても  $(X(s), Y(s))$  として取り扱っている  
以下, Euler, Lagrange, Gaussの何れも, 楕円積分の逆関数として,  
 $X(s), Y(s)$  を取り扱っている.

Abel, Jacobiが「初めて, 楕円積分の逆関数の重要性に気づいた！」  
という逸話は, Legendreが誤った楕円積分観を伝承したためと思われる



# Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見の内容

1.  $xy$ 平面上の曲線の曲率  $\kappa$  を以下で示した ( $s$ は弧長)

$$\kappa = \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds}$$

∴ 接角を  $\phi$  として

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} \sin \phi = \frac{1}{\cos \phi} \cos \phi \frac{d\phi}{ds} = \kappa$$

2. Ansatz 「弾性曲線の  $x$  成分が  $\kappa$  に比例する」の採用

$$\kappa = 2a^2x$$

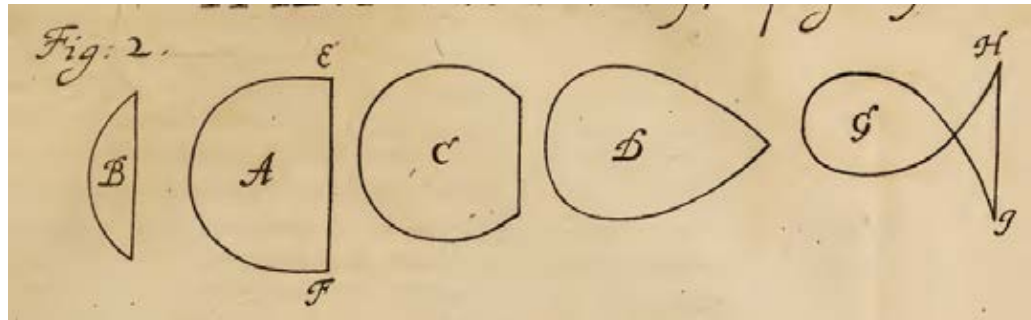
3. 1 & 2より

$$\rightarrow \frac{dy}{ds} = a^2x^2 \quad \because \int_0^x \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} dx = \int_0^x 2a^2x dx$$

$$\rightarrow dy^2 = (a^4x^4)(dx^2 + dy^2) \quad \because ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\rightarrow (1 - a^4x^4)dy^2 = (a^4x^4)dx^2 \quad \rightarrow dy = \frac{a^2x^2 dx}{\sqrt{1 - a^4x^4}}$$

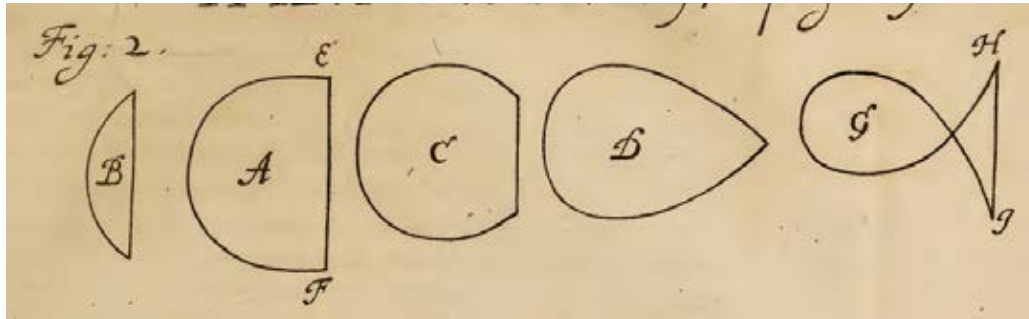
Huygens 1694, 10月 Jacobへの批判：弾性曲線の多様性 65歳



ホイヘンス (1629-1695)



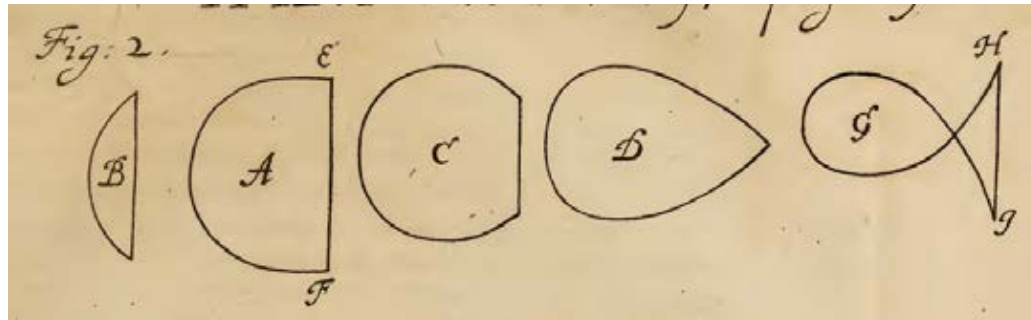
Huygens 1694, 10月 Jacobへの批判：弾性曲線の多様性 65歳



弾性曲線は様々な形状を持つ！  
このアプローチでは拡張性欠ける（Ansatzは不明）



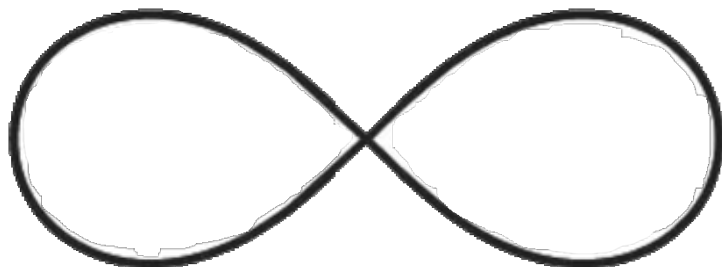
Huygens 1694, 10月 Jacobへの批判：弾性曲線の多様性 65歳



弾性曲線は様々な形状を持つ！  
このアプローチでは拡張性欠ける（Ansatzは不明）

Jacob Bernoulli 1694, 10月 レムニスケート曲線の発見 39歳

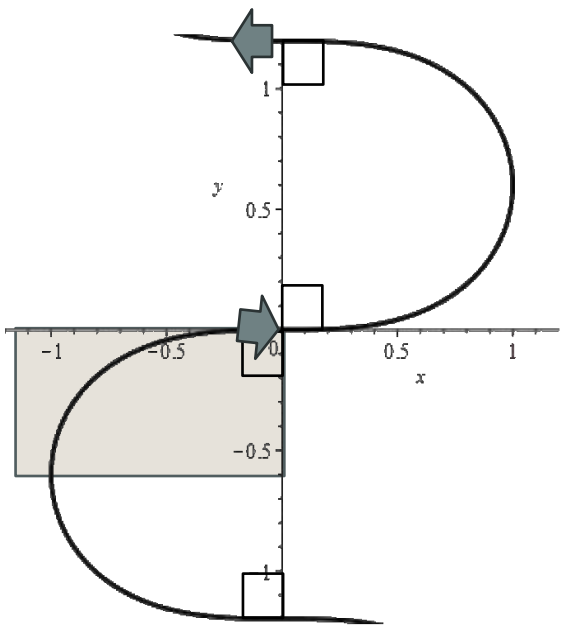
quæ hac æquatione exprimitur  $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$ , quæque circum axem BG (2a) constituta formam refert jacentis notæ octonarii  $\infty$ , seu complicatæ in nodum fasciæ, sive lemnisci, d'un nœud de ruban Gallis. Hujus enim tum altera medietas Curvæ Elasticæ



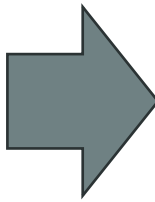
$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1 - X^4}}$$



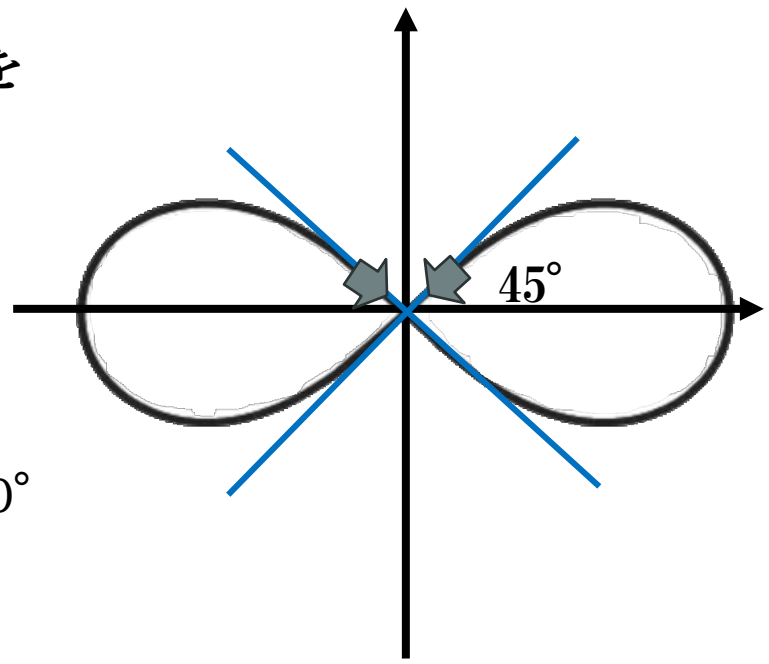
$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1-X^4}}, \quad Y = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\sqrt{1-X^4}}$$



各点で接角を  
 $\frac{3}{2}$ 倍する



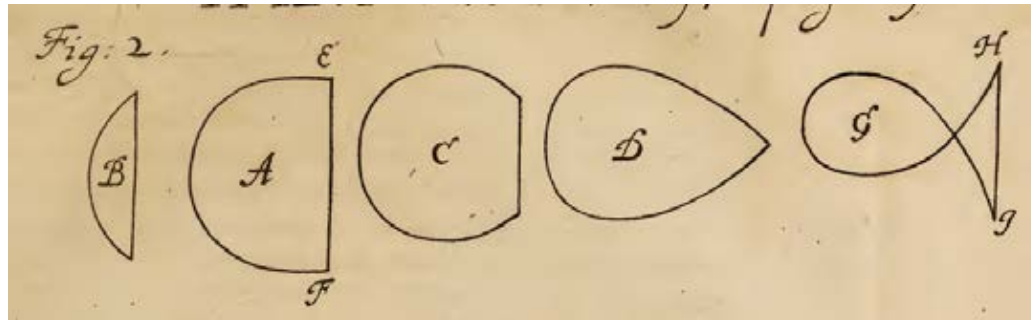
$180^\circ \Rightarrow 270^\circ$



M. 1995



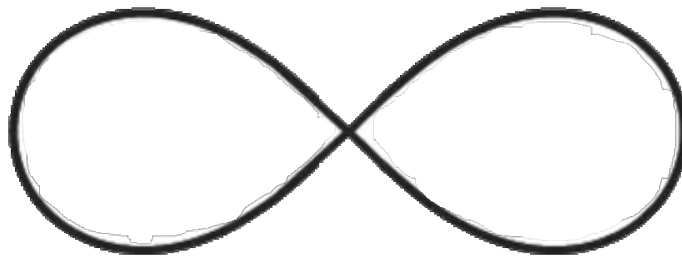
Huygens 1694, 10月 Jacobへの批判：弾性曲線の多様性 65歳



弾性曲線は様々な形状を持つ！  
このアプローチでは拡張性欠ける（Ansatzは不明）

Jacob Bernoulli 1694, 10月 レムニスケート曲線の発見 39歳

quæ hac æquatione exprimitur  $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$ , quæque circum axem BG ( $2a$ ) constituta formam refert jacentis notæ octonarii  $\infty$ , seu complicatæ in nodum fasciæ, sive **lemnisci**, d'un nœud de ruban Gallis. Hujus enim tum altera medietas Curvæ **Elasticæ**



$$s = \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1 - X^4}}$$

Huygensの批判（怒り）をかわすのが狙いではないか？



# Jacob Bernoulli 1694, 6月 長方形弾性曲線方程式の発見の内容

1.  $xy$ 平面上の曲線の曲率  $\kappa$  を以下で示した ( $s$ は弧長)

$$\kappa = \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds}$$

∴ 接角を  $\phi$  として

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} \sin \phi = \frac{1}{\cos \phi} \cos \phi \frac{d\phi}{ds} = \kappa$$

2. Ansatz 「弾性曲線の  $x$  成分が  $\kappa$  に比例する」の採用

$$\kappa = 2a^2 x$$

3. 1 & 2 より

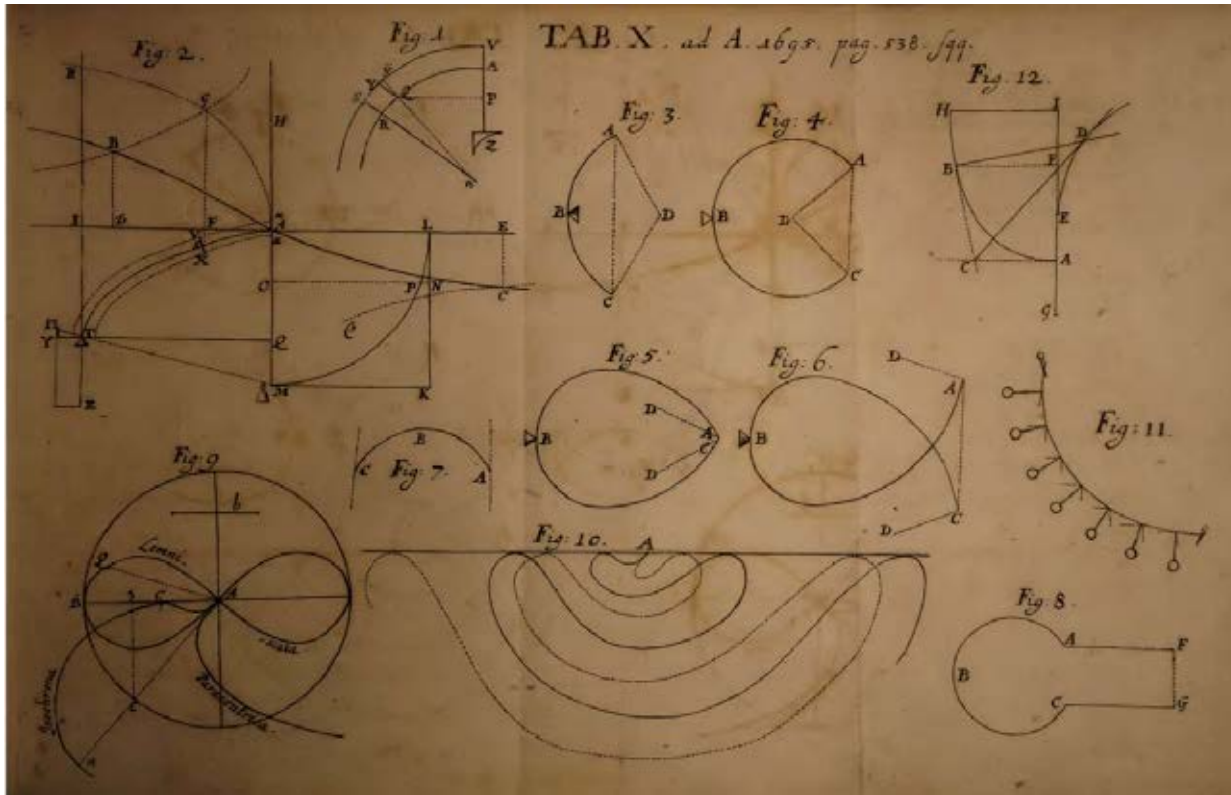
$$\rightarrow \frac{dy}{ds} = a^2 x^2 \quad \because \int_0^x \frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} dx = \int_0^x 2a^2 x dx$$

$$\rightarrow dy^2 = (a^4 x^4)(dx^2 + dy^2) \quad \text{積分の境界条件を変更する!}$$

$$\rightarrow (1 - a^4 x^4) dy^2 = (a^4 x^4) dx^2 \quad \rightarrow \quad dy = \frac{a^2 x^2 dx}{\sqrt{1 - a^4 x^4}}$$

# Jacob Bernoulli 1695 一般の弾性曲線へ

曲率表現+Ansatz 「弾性曲線の x 成分が  $\kappa$  に比例する」より



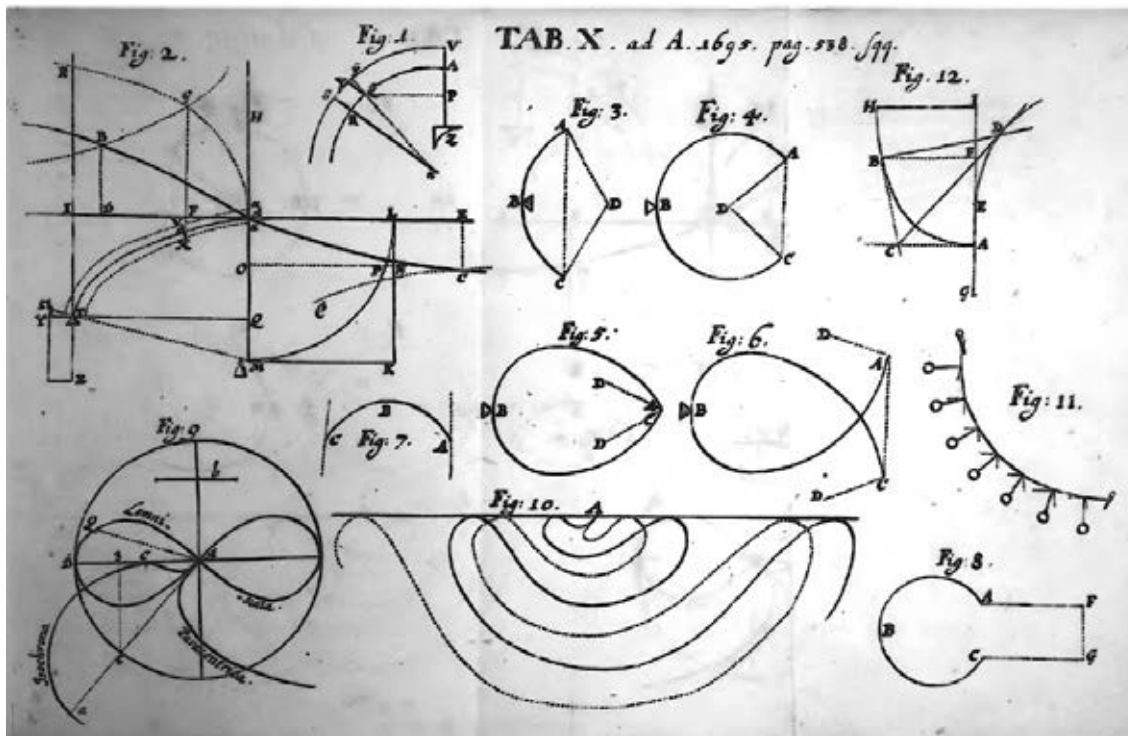
$$\int dy = \frac{xx + ab, dx}{\sqrt{a^4 - (xx + ab)^2}}$$

$$dy = \frac{(xx + ab)dx}{\sqrt{a^4 - (xx + ab)^2}}$$



# Jacob Bernoulli 1695 一般の弾性曲線へ

曲率表現+Ansatz 「弾性曲線の x 成分が  $\kappa$  に比例する」より



$$\int dy = \frac{xx + ab, dx}{\sqrt{a^4 - (xx + ab)^2}}$$

$$dy = \frac{(xx + ab)dx}{\sqrt{a^4 - (xx + ab)^2}}$$



# Fagnano 1718頃, レムニスケート曲線の研究

(レムニスケート  $\overset{\text{変換}}{\Leftrightarrow}$  長方形弾性曲線  
 $\overset{\text{変換}}{\Leftrightarrow}$  等時性パラセントリック曲線)

の対応 (変換関係) を一般化することで、  
Huygensの批判を更に緩和したい?



ファニャーノ (1682-1766)



## Fagnano 1718頃, レムニスケート曲線の研究

(レムニスケート  $\overset{\text{変換}}{\Leftrightarrow}$  長方形弾性曲線  
 $\overset{\text{変換}}{\Leftrightarrow}$  等時性パラセントリック曲線)

の対応 (変換関係) を一般化することで、  
Huygensの批判を更に緩和したい？

### S C O L I O .

NE' seguenti esempj, che sono i più semplici, si avverta, che la lettera  $a$  rappresenta l'unità arbitraria, la quale serve a rendere le dimensioni uniformi. La brevità, che voglio osservare, non mi permette di esporre molte verità, che nascono da questi principj; tra le quali si comprendono alcune altre maniere di giungere a queste rettificazioni, ne dedurrò solamente la soluzione dell'infra scritto problema concernente la curva lemniscata famosa pel suo uso nella costruzione delle curve elastica, e isocrona paracentrica.



# 弾性曲線から楕円関数へ



ダニエル・ベルヌーイ (1700-1782)



オイラー (1707-1783)



Euler 1732, 弾性曲線による一般の楕円積分の発見（力の平衡より）

$$Y = \int^X \frac{(\alpha + \beta X + \gamma X^2)dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}}.$$

等長条件  
(等周問題)

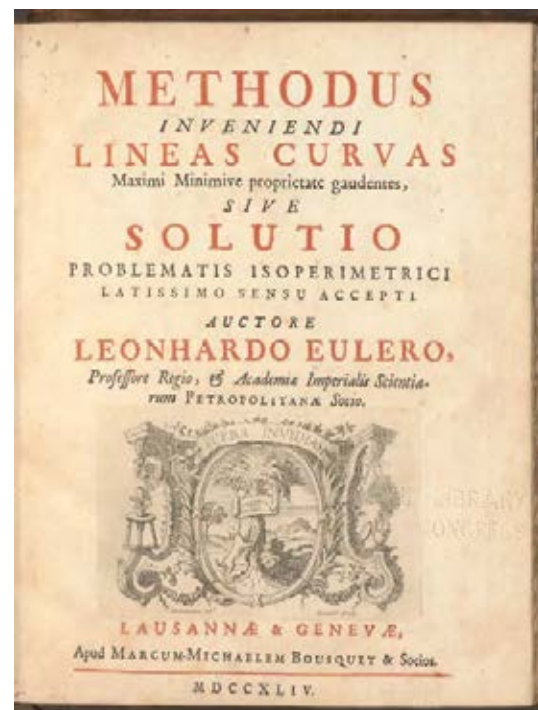
Daniel Bernoulli 1742, 弾性曲線のエネルギーと最小問題の発見

$$\int k^2 ds$$

光学から力学系への  
最小原理の一般化

Euler 1744, 書籍「方法（等周問題）」の出版：  
その付録で弾性曲線問題の完全解決

$$Y = \int^X \frac{(\alpha + \beta X + \gamma X^2)dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}}.$$
$$s = \int^X \frac{a^2 dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}},$$



# 付録：弾性曲線の章 Euler 1744

[ 245 ]

## ADDITAMENTUM I.

### *De Curvis Elasticis.*

#### I.

**J**Am pridem summi quique Geometrae agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditae non solum maximum esse usum in ipsa Analyti, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physico-rum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minime ratio quaequam eluceat: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum aequè feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Hujus rei veropassim tam eximia extant specimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quaestionum naturalium genere, ea investigetur quantitas, quae maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philosophiam potius quam ad Mathesin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturae cognoscendi; altera per causas efficientes, quae Methodus directa vocari solet; altera causas finales; Mathematicus utraque pari successu utitur. Quando scilicet causae efficientes nimis sunt absconditae, finales autem nostram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quaestio solet resolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex causis efficientibus effectum definire licet. In primis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu

## 付録：弾性曲線の章 Euler 1744

[ 24

ADDITAM

De Curvis

J Am pridem summi quique C  
in hoc Libro traditæ non so  
Analyti, sed etiam eam ad reso  
rum amplissimum subsidium affer  
si fabrica sit perfectissima, atque  
luta, nihil omnino in mundo  
minimive ratio quæpiam elucea  
est nullum, quin omnes Mun  
ope Methodi maximorum & mi  
nari queant, atque ex ipsis caus  
passim tam eximia extant specin  
tionem pluribus Exemplis omni  
tius in hoc erit elaborandum, ut  
lium genere, ea investigetur quan  
ve induat valorem: quod neg  
quam ad Mathesin pertinere videntur. Cum tamen supra pat  
teat via effectus Naturæ cognoscendi; altera per causas efficien  
tes, quæ Methodus directæ voc  
Mathematicus utrâque pari suc  
causæ efficientes nimis sunt absc  
cognitionem minus effugiunt; pe  
tio solet resolvi: e contrario au  
tur, quoties ex causis efficientib  
primis autem opera est adhibend  
ad Solutionem aperiatur: sic eni  
alteram maxime confirmatur, si

この書に示された手法は、解析において極めて有用であるばかりか、**物理的問題の解決にも大いに寄与すること**を、偉大な数学者たちは既に認識している。なぜなら、**宇宙の構造は最も完璧であり、最も賢明なる創造主の御業**であるゆえ、**宇宙において何一つとして、最大値と最小値の関係が現れない事象は起こり得ないからである。**

Eulerの方法(等周法・変分法)の開発は「宇宙=神の御業」を読み解くこと, i. e., 力学系(=弾性曲線)の解決が目的であった?!

1752年には「ニュートン方程式」を導出.



summam percipimus voluptatem. Hoc modo, curvatura funis seu catenæ suspensæ duplici via est eruta; altera a priori, ex sollicitationibus gravitatis; altera vero per Methodum maximorum ac minimorum, quoniam funis ejusmodi curvaturam recipere debere intelligebatur, cujus centrum gravitatis infimum obtineret locum. Similiter curvatura radiorum per medium diaphanum variæ densitatis transeuntium, tam a priori est determinata, quam etiam ex hoc principio, quod tempore brevissimo ad datum locum pervenire debeant. Plurima autem alia similia exempla a Viris Celeberrimis BERNOULLIIS, aliisque, sunt prolata, quibus tam Methodus solvendi a priori, quam cognitio causarum efficientium maxima accepit incrementa. Quamquam igitur, ob hæc tam multa ac præclara specimina, dubium nullum relinquitur, quin in omnibus lineis curvis, quas Solutio Problematum physico-mathematicorum suppeditat, maximi minime cujuscumque indoles locum obtineat; tamen sæpenumero hoc ipsum maximum vel minimum difficillime perspicitur; etiamsi a priori Solutionem eruere licuisset. Sic et si figura, quam lamina elastica incurvata induit, jam pridem est cognita; tamen quemadmodum ea curva per Methodum maximorum & minimorum, hoc est, per causas finales, investigari possit, a nemine adhuc est animadversum. Quamobrem cum Vir Celeberrimus, atque in hoc sublimi naturam scrutandi genere perspicacissimus, Daniel BERNOULLI mihi indicasset se universam vim, quæ in lamina elastica incurvata insit, una quadam forma *vim potentialem* appellat, complecti posse; hancque neminem in curva Elastica minimam esse oportere; quoniam hoc invento Methodus mea maximorum ac minimorum hoc Libro tradita mirifice illustratur, ejusque usus amplissimus maxime evincitur; hanc occasionem exoptatissimam prætermittere non possum, quin, hanc insignem curvæ Elasticæ proprietatem a Celeb. BERNOULLIO observatam publicando, simul Methodi meæ usum clarius patefaciam. Continet enim ista proprietas in se differentialia secundi gradus, ita ut ei evolvendæ Methodi Problema isoperimetricum solvendi ante traditæ non sufficiant.

potential

2. Sit AB lamina Elastica utcumque incurvata; vocetur arcus AM =  $s$ , & radius osculi curvæ MR =  $R$ : atque, secundum BERNOULLIUM, exprimetur *vis potentialis* in laminae portione AM contenta hac formula  $\int \frac{ds}{RR}$ , siquidem lamina sit ubique æqualiter crassa, lata & elastica, atque in statu naturali in directum extensa. Hinc ista erit curvæ AM indoles, ut in ea hæc expressio omnium minimum obtineat valorem. Quoniam vero in radio osculi  $R$  differentialia secundi gradus insunt, ad curvam hac proprietate præditam determinandam quatuor opus erit conditionibus, id quod cum Quæstionis natura apprime convenit. Cum enim per datos terminos A & B infinitæ laminae Elastice eaque ejusdem longitudinis inflecti queant, quæstio non erit determinata, nisi præter duo puncta A & B, simul alia duo puncta, seu quod eodem redit positio tangentium in punctis extremis A & B præscribatur. Proposita namque lamina Elastica, longiori quam est distantia punctorum A & B; ea non solum ita incurvari potest, ut intra terminos A & B contineatur, sed etiam ut ejus tangentes in punctis hinc datas teneant directiones. His notatis; Quæstio de inve-nienda curvatura laminae Elastice, ex hoc fonte resolvenda, ita debet proponi: *ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum per puncta A & B transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis  $\int \frac{ds}{RR}$  minimus.*

De curva  
tuta La-  
mina  
Elastice  
uniformis.  
Fig. 1.

3. Quia solutionem ad coordinatas orthogonales accommodari convenit, sumatur recta quæcumque AD pro axe, in qua sit abscissa AP =  $x$ , applicata PM =  $y$ ; ponatur, uti Methodus tradita jubet,  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ; erit elementum curvæ Mm =  $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ . Primum ergo quia curvæ, ex quibus quæsitæ erui debet, isoperimetrae statuuntur, habebitur ista expressio consideranda  $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ ; quæ cum generali  $\int Z dx$  comparata hunc præbet valorem differentialem

$$\frac{1}{dx}$$

Fig. 2.

$\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}.$  Deinde cum fit radius osculi  $= \frac{dx\sqrt{1+pp}^{3/2}}{dp}$   
 $= \frac{(1+pp)^{3/2}}{q} = R,$  formula  $f. \frac{ds}{R}$ , quæ minimum esse de-  
 bet, abit in  $f. \frac{qq dx}{(1+pp)^{5/2}}.$  Comparetur hæc cum forma gene-  
 rali  $fZ dx$ ; erit  $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5/2}},$  & posito  $dZ = M dx +$   
 $N dy + P dp + Q dq,$  erit  $M = 0, N = 0, P = \frac{-5ppq}{(1+pp)^{7/2}},$   
 &  $Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5/2}}.$  Valor ergo differentialis ex hac formu-  
 la  $f. \frac{qq dx}{(1+pp)^{5/2}}$  oriundus, erit  $-\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2}.$  Quamobrem  
 pro curva quæsita hæc habebitur æquatio,  $\frac{d}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} =$   
 $\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx^2};$  quæ, per  $dx$  multiplicata & integrata, dat  
 $\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + C = P - \frac{dQ}{dx}.$  Multiplicetur hæc æquatio per  
 $q dx = dp,$  ut prodeat  $\frac{ap dp}{\sqrt{(1+pp)}} + C dp = P dp - q dQ.$   
 Cum autem, ob  $M = 0$  &  $N = 0,$  fit  $dZ = P dp + Q dq,$   
 erit  $P dp = dZ - Q dq,$  quo valore loco  $P dp$  substituto,  
 emerget  $\frac{ap dp}{\sqrt{(1+pp)}} + C dp = dZ - Q dq - q dQ;$  quæ  
 denuo integrata dat  $a\sqrt{(1+pp)} + Cp + \gamma = Z - Qq.$   
 Jam cum fit  $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5/2}},$  &  $Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5/2}},$  erit  
 $a\sqrt{(1+pp)} + Cp + \gamma = \frac{-qq}{(1+pp)^{5/2}}.$  Sumantur constan-  
 tes arbitrariæ  $a, C,$  &  $\gamma$  negative, eritque  $q = (1+pp)^{5/4}$   
 $\times \sqrt{a}$

等長(等周)条件下での  
変分問題を解く!

Lagrange未定乗数法を活用

Euler-Lagrange方程式

並進対称性に関する  
Noetherの定理(運動量写像)  
(Emmy Noether 1918)

M, Euleriana 2025



$\times \sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)} = \frac{dp}{dx}$ . Hinc ergo elicitor sequens æquatio

$$dx = \frac{dp}{(1+pp)^{5/4} \sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)}}$$

Deinde ob  $dy = p dx$ , habebitur quoque

$$dy = \frac{p dp}{(1+pp)^{5/4} \sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)}}$$

quæ duæ æquationes sufficerent ad curvam per quadraturas conftruendam.

4. Harum formularum sic in genere spectatarum neutra est integrabilis; combinari autem certo quodam modo possunt, ut aggregatum integrationem admittat. Cum enim sit

$$d. \frac{2\sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)}}{\sqrt{\sqrt{(1+pp)}}} = \frac{dp(\epsilon - \gamma p)}{(1+pp)^{5/4} \sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)}}$$

$$\text{erit } \frac{2\sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p + \gamma)}}{(1+pp)^{1/4}} = \epsilon x - \gamma y + d. \text{ Quo-}$$

niam axis positio est arbitraria, constans  $d$  sine defectu amplitudinis omitti potest. Deinde vero etiam axis ita mutari potest

$$\text{ut fiat } \frac{\epsilon x - \gamma y}{\sqrt{(\epsilon\epsilon + \gamma\gamma)}} \text{ abscissa, eritque applicata } \frac{\gamma x + \epsilon y}{\sqrt{(\epsilon\epsilon + \gamma\gamma)}};$$

hinc etiam tuto  $\gamma$  nihilo æqualis poni potest, quia nihil impedit, quominus illa nova abscissa per  $x$  exprimatur. Hanc ob rem; habebimus pro curva Elastica istam æquationem

$$2\sqrt{(\alpha \sqrt{(1+pp)} + \epsilon p)} = \epsilon x (1+pp)^{1/4}; \text{ quæ, sumptis quadratis, dat } 4\alpha \sqrt{(1+pp)} + 4\epsilon p = \epsilon^2 x^2 \sqrt{(1+pp)}. \text{ Sit,}$$

$$\text{ad homogeneitatem introducendam, } \alpha = \frac{4m}{aa} \text{ \& } \epsilon = \frac{4n}{aa}$$

$$\text{erit } naap = (nxxx - maa) \sqrt{(1+pp)}, \text{ unde } n^2 a^4 pp = (nxxx - maa)^2 (1+pp); \text{ ideoque } p = \dots$$

$$\frac{nxxx - maa}{\sqrt{(n^2 a^4 - (nxxx - maa)^2)}} = \frac{dy}{dx}. \text{ Mutatis ergo constan-}$$

tibus, atque abscissam  $x$  data constante sive augendo sive minuendo; habebitur hujusmodi æquatio pro curva Elastica generalis:

SO(2)と並進対称性を  
活用した議論



$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x x) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x x)^2}}, \text{ ex qua oritur}$$

$$ds = \frac{a dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x x)^2}}; \text{ ex quibus æquationibus consensus hujus curvæ inventæ cum curva Elastica jam pridem eruta manifesto elucet.}$$

5. Quo autem iste consensus clarius ob oculos ponatur, naturam curvæ Elastice a priori quoque investigabo; quod etsi jam a Viro summo *JACOBO BERNOULLIO* excellentissime est factum; tamen, hæc idonea occasione oblata, nonnulla circa indolem curvarum Elasticarum, earumque proprietates adjiciam; quæ ab aliis vel prætertractata esse video.

Fig. 3.

Sit lamina Elastica AB in B infixa, ut hæc extremitas B non etiam tangens in B positio detur; connexam habeat virgam rigidam ta sit vis CD = P, qua lamina indigatur. Sumatur hæc recta AC per AC = c, sit abscissa AP = x, si jam lamina in M omnem elasticam perfecte flexilis evaderet; a vi P ne proficiscente a vis P momento ergo hæc inflexio actu sequatur, elastica

librio consistit cum vis sollicitantis momento P(c + x). Elasticitas autem primo ab indole materiæ ex qua lamina constat, & quam ubique eandem statuo, pendet; tum vero simul ab incurvatione laminæ in puncto M, ita ut sit reciproce proportionalis radio osculi in M. Sit ergo radius osculi in M = R =  $\frac{ds^2}{dx ddy}$ ; existente ds =  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  & dx constante; atque exprimat  $\frac{Ekk}{R}$  vim Elasticam laminæ in M, quæ cum momento vis sollicitantis P(c + x) in æquilibrio consistat, ita ut sit  $P(c + x) = \frac{Ekk}{R} = \frac{Ekk dx ddy}{ds^2}$ . Æquatio hæc

per

$$Y = \int \frac{(\alpha + \beta X + \gamma X^2) dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}}.$$

$$s = \int \frac{a^2 dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}},$$



## Euler 1744 の弾性曲線方程式の導出

Eulerは、Jacob BernoulliのAnsatzを陰に証明した

$$\kappa = \beta \frac{x}{2}$$

Eulerは、陰に弾性曲線方程式として、静MKdV方程式を導出

$$8\beta \frac{d^2 x}{ds^2} + \beta^3 x^3 - 4\alpha\beta x = 0$$

**弾性曲線方程式としての静MKdV方程式の陽な導出は  
Bryant-Griffiths (1986) による**

$$(4.a.7) \quad \dot{\kappa}^2 + \frac{\kappa^4}{4} - \kappa^2 = B(\mu, \mu) = \text{constant.}$$

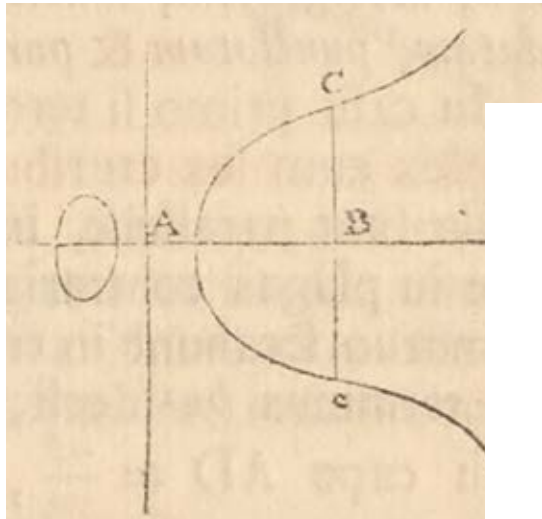
Reduction for Constrained Variational Problems and  $\int \kappa^2/2 ds$

Author(s): Robert Bryant and Phillip Griffiths

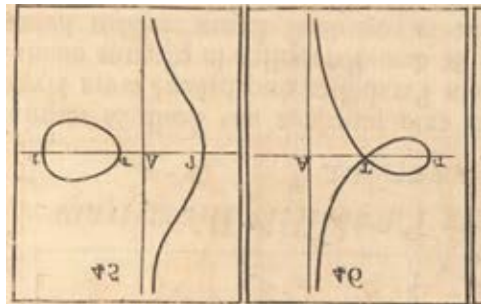
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 108, No. 3 (Jun., 1986), pp. 525-570



# Newton 1711, 1669年の実楕円曲線のモデュライの研究の書籍出版



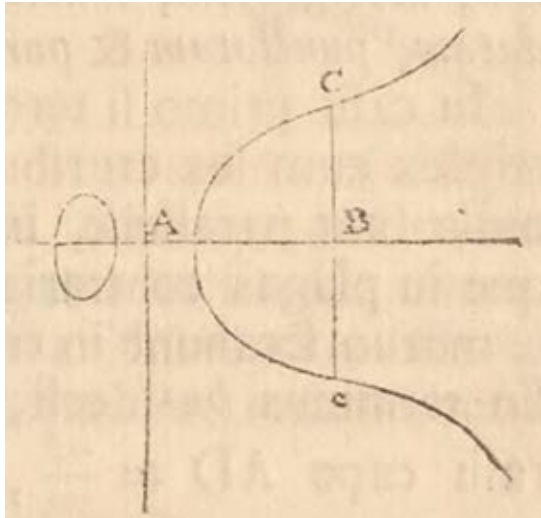
$$wy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



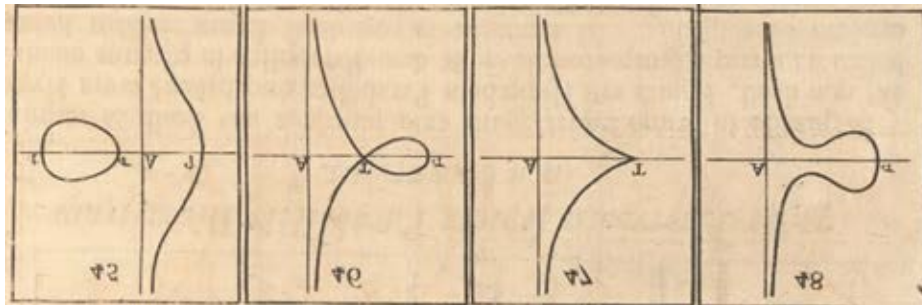
アイザック・ニュートン (1642-1727)



# Newton 1711, 1669年の実楕円曲線のモデュライの研究の書籍出版



$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



ENUMERATIO  
LINEARUM  
TERTII ORDINIS.

I. *Linearum Ordines.*

Lineæ Geometricæ secundum numerum dimensionum æquationis quæ relatis lineæ Ordinatus & Abſciffis determinat, vel (quod potius est) secundum numerum punctorum in quibus a lineæ recta secari possunt, optime distinguuntur in Ordines. Quæ ratione lineæ primi Ordinis sunt Rectæ sola, secundi sive quadrati Ordinis sunt sectiles Conicæ & Circulus, & ex tertii sive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola Neûtoniana, Cissoides veterum, & reliquæ quæ hic enumerare suscepimus. Curva autem primi Generis, (siquidem recta inter Curvas non est numeranda) eadem est cum Linea secundi Ordinis, & Curva secundi Generis eadem cum Linea Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infinitissimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & lineæ omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

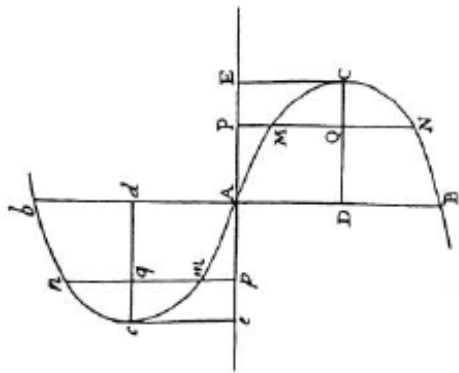
8 H. Pro.



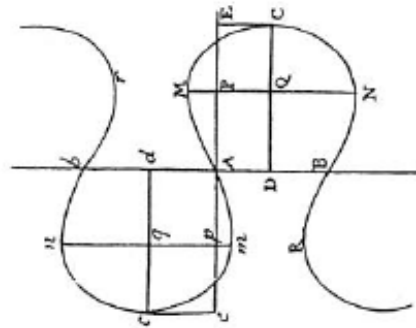
# Euler 1744, 実楕円積分のモデュライの研究により弾性曲線の完全分類

X

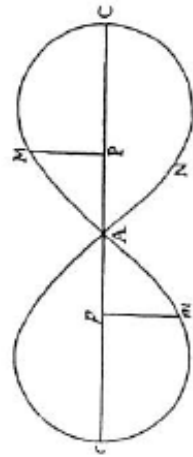
Y



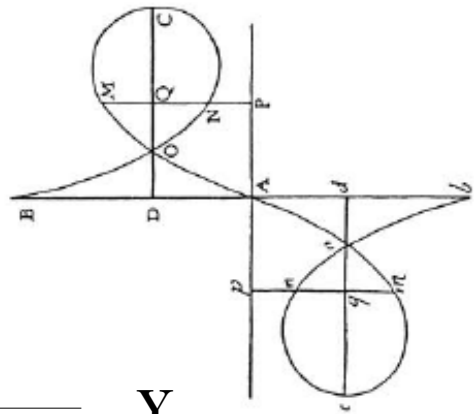
3a. Class 2



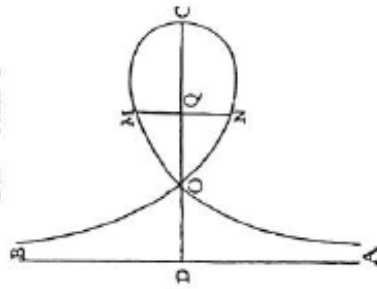
3b. Class 4



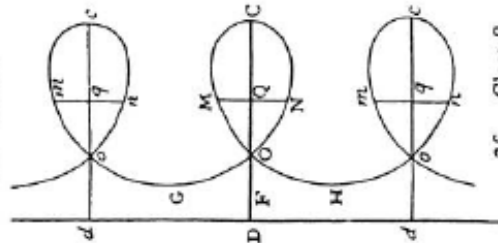
3c. Class 5



3d. Class 6



3e. Class 7

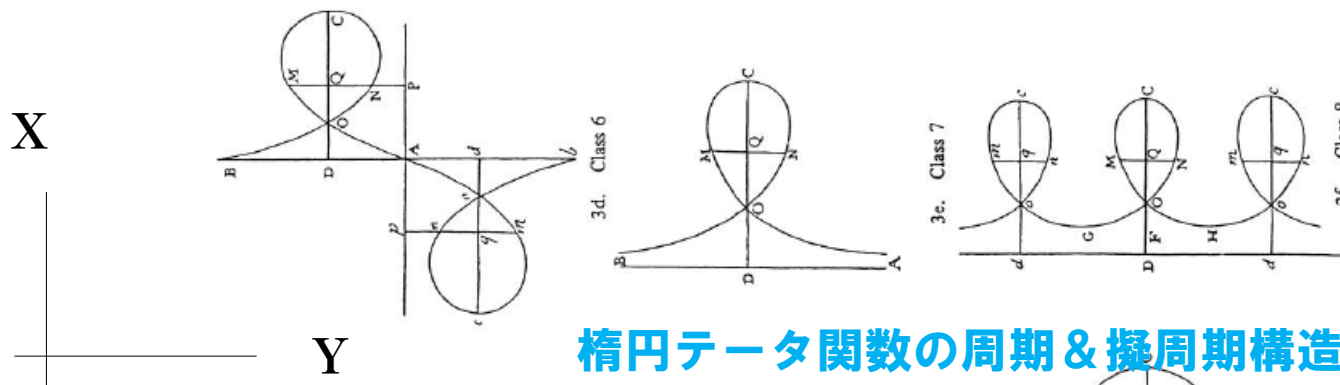


3f. Class 8

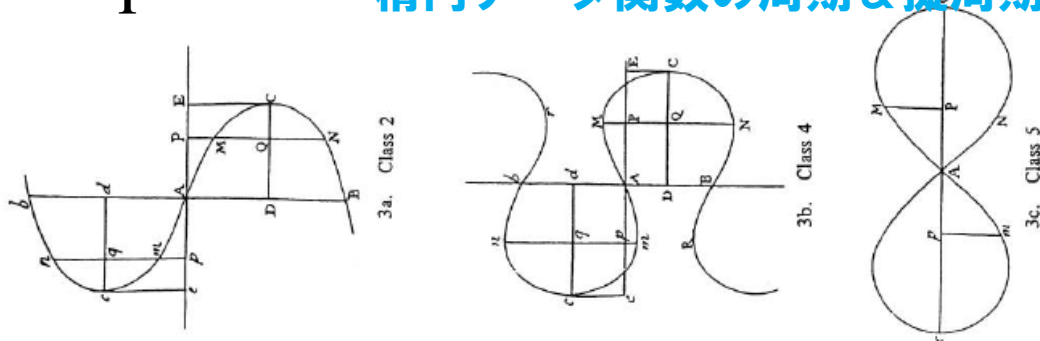
周期 & 擬周期構造を示している



# Euler 1744, 実楕円積分のモデュライの研究により弾性曲線の完全分類



楕円テータ関数の周期&擬周期構造を示している

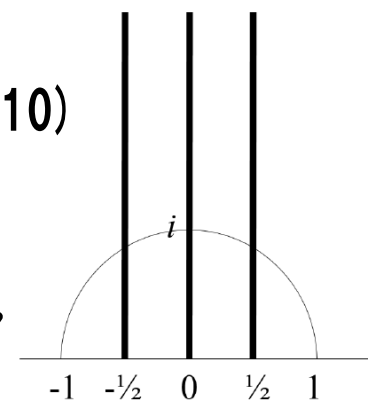


現代的に見た  
弾性曲線のモデュライ

この形状は、Weierstrassの $\zeta$ 関数によって記述される (M2010)

$$X(s) + \sqrt{-1}Y(s) = \sqrt{-1}(-\zeta(s + \omega_3) - e_1s)$$

この形状を眺めて、テータ関数との関連を想起できたのは、Mumford (1994). Gaussは反応した?! Eulerも恐らく...



(Lagrange, Legendre, Jacobi, 多くの数学者が気づけなかった)



# Euler 1738 (?), 長方形彈性曲線の研究：

$$\text{length} \times \text{height} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \pi.$$

27. In tertia specie unicum complector casum, quo  $c = a$ , quia hoc casu axis AP curvam in puncto A tangit: hæcque species singulare nomen curvæ Elasticæ rectangulæ obtinuit. Erit ergo  $dy = \frac{xx dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ , &  $ds = \frac{aa dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ ; hoc igitur casu AD & AC ita se habebunt ut sit:

$$AC = f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{1}{8} + \&c. \right)$$

$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3 \cdot 4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5 \cdot 8} + \&c. \right).$$

Quoniam autem hinc, neque  $b$ , neque  $f$  per  $a$  accurate assignari potest; tamen alibi insignem relationem inter has quantitates locum habere demonstravi. Scilicet ostendi esse  $4bf = \pi aa$ ; seu rectangulum ex AD & AC formatum erit æquale areæ Circuli cujus diameter est = AE. Reperietur autem, calculum subducendo, proxime  $f = \frac{5a}{6} \times \frac{\pi}{2}$ , ita ut sit  $a = \frac{12f}{5\pi}$ ; hinc vis

262

## DE CURVIS

qua laminæ extremitates A, B ad se invicem contrahi debent;

erit  $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{25}{72} \pi \pi$ . Propius vero reperitur  $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \cdot 1,1803206$ ,

hincque  $b = \frac{\pi aa}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1,1803206$ ; unde in numeris puris

erit  $\frac{f}{a} = 1,311006$ , &  $\frac{b}{a} = 0,834612$ .

# Euler 1738 (?), 長方形弾性曲線の研究：

$$\text{length} \times \text{height} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\pi.$$

27. In tertia specie unicum complector casum, quo  $c = a$ , quia hoc casu axis AP curvam in puncto A tangit: hæcque species singulare nomen curvæ Elasticæ rectangulæ obtinuit. Erit

- Legendre 関係式の特殊版
- Gauss を算術幾何平均へ誘った

$\frac{a dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ; hoc igi-

$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1.2} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3.4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5.8} - \&c. \right).$$

Quoniam autem hinc, neque  $b$ , neque  $f$  per  $a$  accurate assignari potest; tamen alibi insignem relationem inter has quantitates locum habere demonstravi. Scilicet ostendi esse  $4bf = \pi a^2$ ; seu rectangulum ex AD & AC formatum erit æquale areæ Circuli cujus diameter est = AE. Reperietur autem, calculum subducendo, proxime  $f = \frac{5a}{6} \times \frac{\pi}{2}$ , ita ut sit  $a = \frac{12f}{5\pi}$ ; hinc vis

262

## DE CURVIS

qua laminæ extremitates A, B ad se invicem contrahi debent;

erit  $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{25}{72} \pi \pi$ . Propius vero reperitur  $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \cdot 1,1803206$ ,

hincque  $b = \frac{\pi a^2}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1,1803206$ ; unde in numeris puris

erit  $\frac{f}{a} = 1,311006$ , &  $\frac{b}{a} = 0,834612$ .



## Euler 1751.12-1752.1, Fagnanoの研究により加法定理を得た

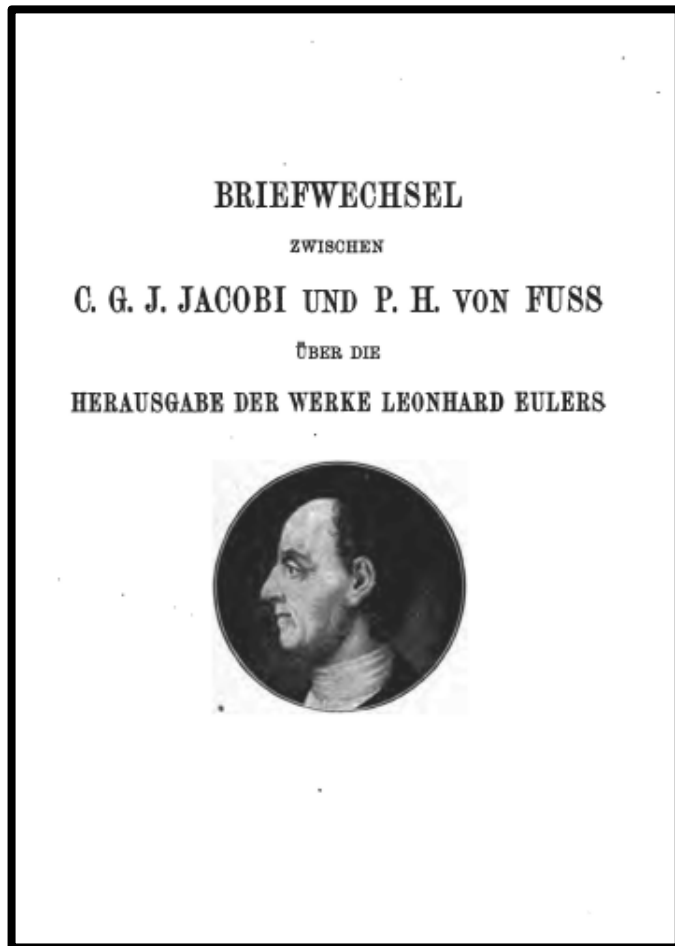
$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$



$$\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$
$$w = \frac{z\sqrt{1-u^4} + u\sqrt{1-z^4}}{1+uuz},$$



# Euler 1751.12-1752.1, Fagnanoの研究により加法定理を得た Jacobi-Fussの見解：「このとき楕円関数が誕生した」



1746以降のEulerの行動録  
1843出版

7. Jacobi an Fuss, 24. Oktober 1847. 23

noch so geringfügig scheinenden Umstand, welcher EULER betrifft, lege, Ihnen anbei zu übersenden. Zur Franzosenzeit sind die Archive der Akademie, als diese selbst während 10 Jahren suspendirt war, umhergestreut gewesen, und erst in der jetzigen Zeit sind die Trümmer wieder gesammelt worden. Wie die von mir angefertigte Liste ergibt befinden sich unter dem Geretteten die lateinischen Originale ziemlich vieler Abhandlungen von LEONHARD und J. A. EULER, von denen französische Übersetzungen publicirt sind. Von viel größerem Interesse sind aber Arbeiten EULERS, welche im Msc. eine ganz andere Gestalt haben, als welche er ihnen später gegeben hat, so daß man sieht, daß er keineswegs so wie man glauben möchte die Publication seiner Arbeiten übereilt hat, sondern sie bisweilen lange liegen ließ und mehrfach umarbeitete. Von vorzüglichem Interesse schien mir aber auch aus den alten Protocollen die Liste der Abhandlungen zu entnehmen, die er in den verschiedenen Sitzungen gelesen hat, da dieses das beste Bild seiner Thätigkeit giebt, indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abdruckenden unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie EULER auffordert das von FAGNANI ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden.

7. Jacobi an Fuss, 24. Oktober 1847. 31

18. Nov. *Réflexions sur la machine de M. MAUER pour elever l'eau* [NB Vielleicht No. 583].

2. Dec. *Tentamen theoriae de frictione fluidorum* [575].

23. Dec. M. le Président présente un ouvrage de géométrie en italien en 2 volumes in 4°, que M. le Marquis de FAGNANO son Auteur envoie à l'Académie. M. EULER prendra la peine de l'examiner, avant qu'on fasse réponse. (Von dieser Zeit an datiren die durch dieses Werk hervorgerufenen Arbeiten EULERS über die Addition der elliptischen Integrale.)  
Großer Brief von KOENIG an MAUPERTEUS.

1752.

27. Jan. *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.* Die Frucht der Lecture des Werkes von FAGNANO; das Fundamentalstheorem über die Addition der Integrale  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  [423].



# Euler 1751.12-1752.1, Fagnanoの研究により加法定理を得た Jacobi-Fussの見解：「このとき楕円関数が誕生した」

indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abzudruckenden unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie EULER auffordert das von Fagnani ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden.

noch  
Ihnen

Akademie, als diese selbst während 10 Jahren suspendirt war, umhergestreut gewesen, und erst in der jetzigen Zeit sind die Trümmer wieder gesammelt worden. Wie die von mir angefertigte Liste ergibt befinden sich unter dem Geretteten die lateinischen Originale ziemlich vieler Abhandlungen von LEONHARD und J. A. EULER, von denen französische Übersetzungen publicirt sind. Von viel größerem Interesse sind aber Arbeiten EULERS, welche im Msc. eine ganz andere Gestalt haben, als welche er ihnen später gegeben hat, so daß man sieht, daß er keineswegs so wie man glauben möchte die Publication seiner Arbeiten übereilt hat, sondern sie bisweilen lange liegen ließ und mehrfach umarbeitete. Von vorzüglichem Interesse schien mir aber auch aus den alten Protocollen die Liste der Abhandlungen zu entnehmen, die er in den verschiedenen Sitzungen gelesen hat, da dieses das beste Bild seiner Thätigkeit giebt, indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abzudruckenden unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie EULER auffordert das von Fagnani ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden.

7. Jacobi an Fuss, 24. Oktober 1847.

31

18. Nov. *Réflexions sur la machine de M. MAUER pour élever l'eau* {NB Vielleicht No. 583}.
2. Dec. *Tentamen theoriae de frictione fluidorum* {575}.
23. Dec. M. le Président présente un ouvrage de géométrie en italien en 2 volumes in 4<sup>o</sup>, que M. le Marquis DE Fagnano son Auteur envoie à l'Académie. M. EULER prendra la peine de l'examiner, avant qu'on fasse réponse. (Von dieser Zeit an datiren die durch dieses Werk hervorgerufenen Arbeiten EULERS über die Addition der elliptischen Integrale.)  
Großer Brief von KOENIG an MAUPERTUIS.  
1752.
27. Jan. *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.*  
Die Frucht der Lectüre des Werkes von Fagnano; das Fundamentaltheorem über die Addition der Integrale  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  {423}.



# Euler 1751.12-1752.1, Fagnanoの研究により加法定理を得た Jacobi-Fussの見解：「このとき楕円関数が誕生した」

indem er in  
unserer Akad  
Ihrigen hat  
ich auch ein  
Tag gefunden  
FAGNANI ihr  
wortet. Aus  
entstanden.

noch  
Ihnen

Akademie, als diese selbst während 10  
gestreut gewesen, und erst in der jetzigen Zeit sind die Trümmer wieder  
gesammelt worden. Wie die von mir angefertigte Liste ergibt befinden  
sich unter dem Geretteten die lateinischen Originale ziemlich vieler Ab-  
handlungen von LEONHARD und J. A. EULER, von denen französische Über-  
setzungen publicirt sind. Von viel größerem Interesse sind aber Arbeiten  
EULERS, welche im Msc. eine ganz andere Gestalt haben, als welche er  
ihnen später gegeben hat, so daß man sieht, daß er keineswegs so wie  
man glauben möchte die Publication seiner Arbeiten übereilt hat, sondern  
sie bisweilen lange liegen ließ und mehrfach umarbeitete. Von vorzüg-  
lichem Interesse schien mir aber auch aus den alten Protocollen die  
Liste der Abhandlungen zu entnehmen, die er in den verschiedenen  
Sitzungen gelesen hat, da dieses das beste Bild seiner Thätigkeit giebt,  
indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abzudruckenden  
unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der  
Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe  
ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen  
Tag gefunden, an welchem unsere Akademie EULER auffordert das von  
FAGNANI ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser ant-  
wortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen  
entstanden.

弾性曲線を通じた,

- 楕円積分と非線形微分方程式の関係
- 楕円積分の逆関数としての楕円関数の考察
- 実楕円曲線のモデュライの研究
- Legendre関係式の発見

などを考慮すると「適切ではない」と考える

18. Nov. *Réflexions sur la machine de M. MAUER pour élever l'eau*  
{NB Vielleicht No. 583}.
2. Dec. *Tentamen theoriae de frictione fluidorum* {575}.
23. Dec. M. le Président présente un ouvrage de géométrie en italien  
en 2 volumes in 4<sup>o</sup>, que M. le Marquis DE FAGNANO son  
Auteur envoie à l'Académie. M. EULER prendra la peine de  
l'examiner, avant qu'on fasse réponse. (Von dieser Zeit an  
datiren die durch dieses Werk hervorgerufenen Arbeiten  
EULERS über die Addition der elliptischen Integrale.)  
Großer Brief von KOENIG an MAUPERTUIS.  
1752.
27. Jan. *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.*  
Die Frucht der Lectüre des Werkes von FAGNANO; das Funda-  
mentalthorem über die Addition der Integrale  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$   
{423}.



# Euler 1751.12-1752.1, Fagnanoの研究により加法定理を得た Jacobi-Fussの見解：「このとき楕円関数が誕生した」

indem er in  
unserer Akad  
Ihrigen hat  
ich auch ein  
Tag gefunden  
FAGNANI ihr  
wortet. Aus  
entstanden.

弾性曲線を通じた,

- 楕円積分と非線形微分方程式の関係
- 楕円積分の逆関数としての楕円関数の考察
- 実楕円曲線のモデュライの研究
- Legendre関係式の発見

などを考慮すると「適切ではない」と考える

noch  
Ihnen

Akademie, als diese selbst während 10 Jahren suspendirt war, umher-

gestreut gewesen, und erst  
gesammelt worden. Wie  
sich unter dem Geretteten  
handlungen von LEONHARD  
setzungen publicirt sind.

EULERS, welche im Msc.  
ihnen später gegeben hat,  
man glauben möchte die  
sie bisweilen lange liegen  
lichem Interesse schien  
Liste der Abhandlungen  
Sitzungen gelesen hat, da  
indem er in der Regel an  
unserer Akademie vorgele

Ihrigen hat mir viel Ver  
ich auch einen für die  
Tag gefunden, an welche  
FAGNANI ihr übersandte V  
wortet. Aus dieser Prüfu  
entstanden.

7. Jacobi an Fuss, 24. Oktober 1847.

31

*l'eau*

talien  
son  
ne de  
eit an  
beiten

*ilium.*  
unda-  
dx  
1-x<sup>4</sup>

1. Jacobiは弾性曲線の仕事を知らなかった？

2. 知っていたが、あえて無視した？

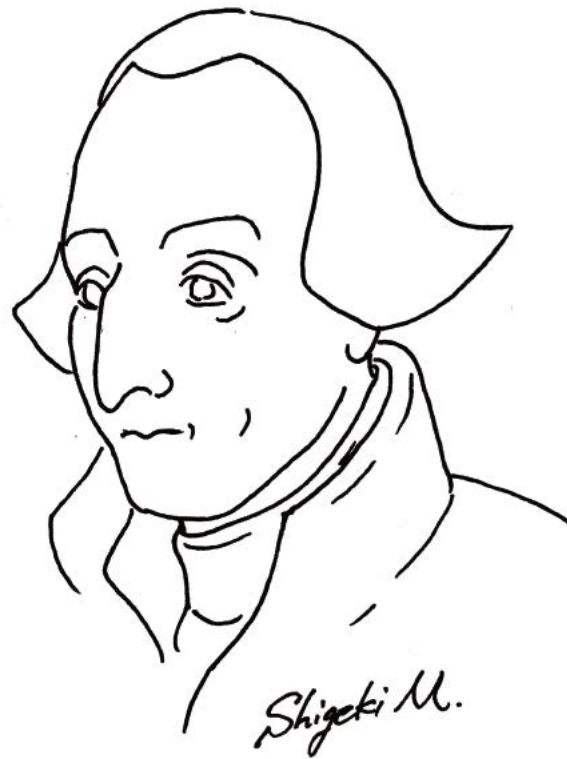
- 整数論（代数）と結びつく楕円関数こそが楕円関数論であり、その始まりである（解析はどちらでもいい）
- 1833に亡くなった尊敬するLegendreがEuler積分と呼んだものと楕円関数論史を結び付けたい？
- 「逆関数」としての楕円関数の発見の事実に対して、弾性曲線の研究はJacobiにとって不都合だった？
- Fourierとの確執（1830年）から楕円積分が技術と結びついた史実を隠蔽したい？



# Euler 1757, 弾性曲線の分岐の研究



# Euler 1757, 弾性曲線の分岐の研究



ラグランジュ (1736-1813)



Euler 1757, 弾性曲線の分岐の研究 :

*Sur la force des colonnes*

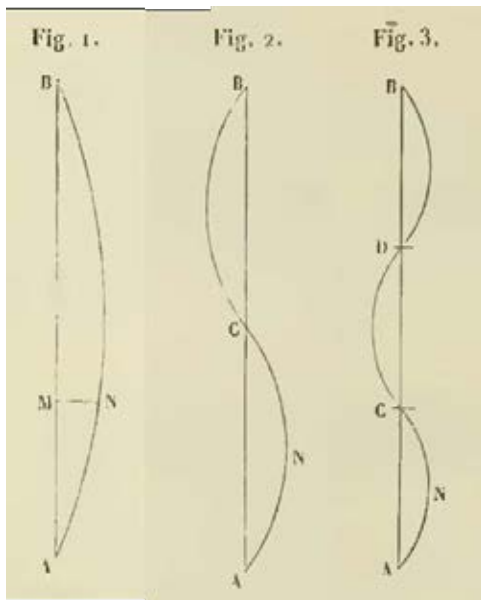
加法定理が意味を持つ問題

Lagrange 1770, 弾性曲線の分岐の研究 :

*Sur la figure des colonnes*

接角による弾性曲線方程式の導出

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2a - a^2 f^2 \cos^2 \varphi}}$$



Lagrange 1771, 接角による弾性曲線方程式の導出

静サイン・ゴルドン方程式 (非線形振り子方程式) と同定

$$ds = \frac{K d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}},$$

$$dx = \frac{K \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}},$$

$$dy = \frac{K \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}}$$



Euler 1757, 弾性曲線の分岐の研究 :

*Sur la force des colonnes*

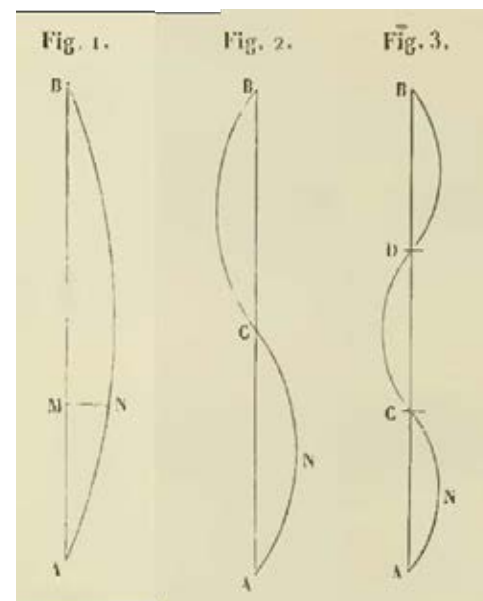
加法定理が意味を持つ問題

Lagrange 1770, 弾性曲線の分岐の研究 :

*Sur la figure des colonnes*

接角による弾性曲線方程式の導出

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2a - a^2 f^2 \cos^2 \varphi}}$$



Lagrange 1771, 接角による弾性曲線方程式の導出

静サイン・ゴルドン方程式 (非線形振り子方程式) と同定

$$ds = \frac{K d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}},$$

$$dx = \frac{K \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}},$$

$$dy = \frac{K \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P(1 - \cos \varphi) + N \sin \varphi}}$$

静サイン・ゴルドン方程式

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \sin \varphi$$



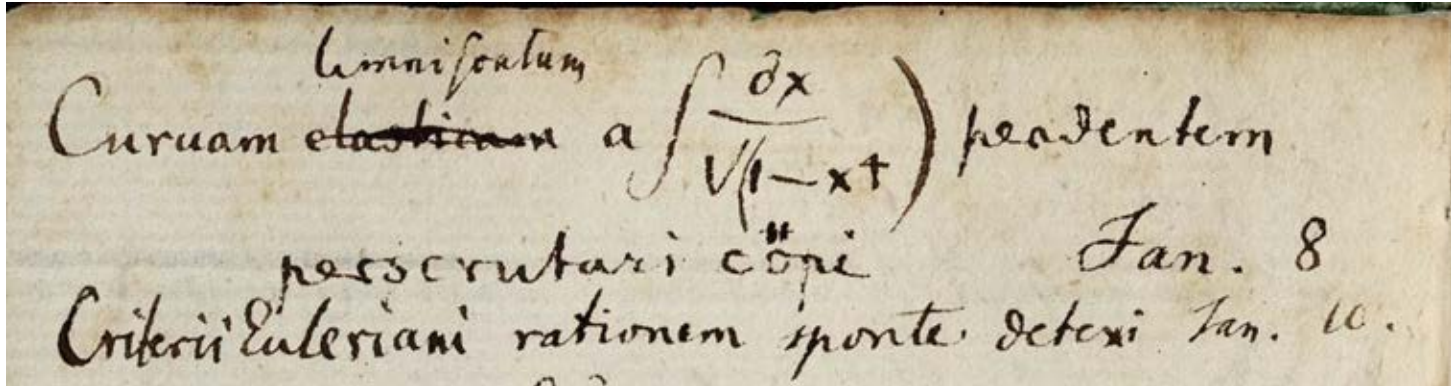
## 弾性曲線から $\sigma$ 関数の原型へ



ガウス (1777-1855)



# Gauss 1797 1 8 日記, 弾性曲線の研究についての記述



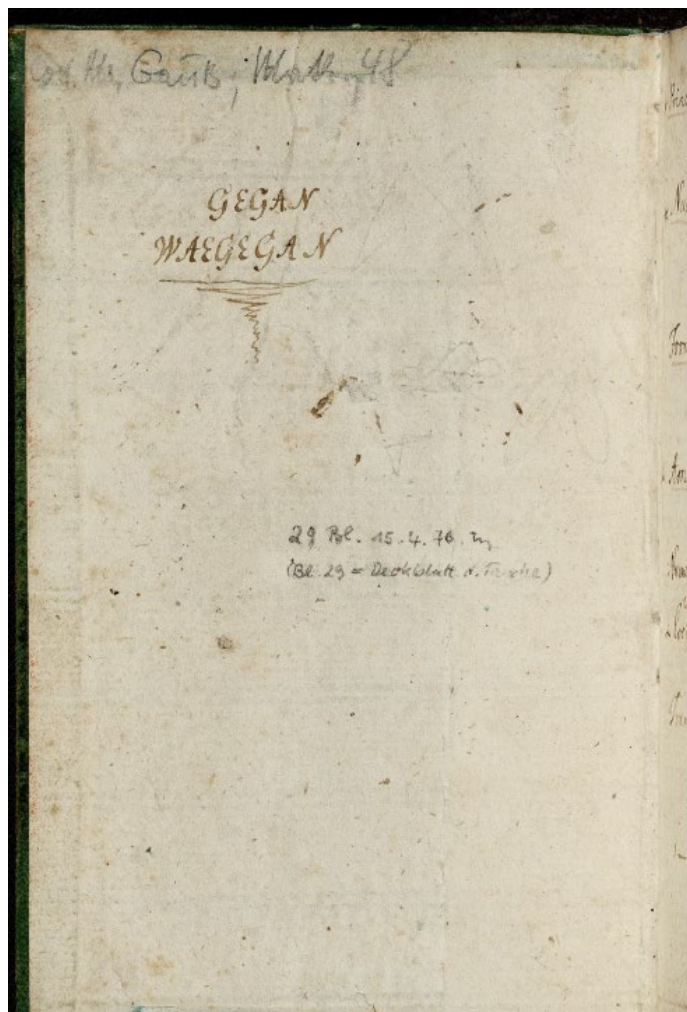
Curvam elasticam a  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  pendentem perscrutari copi

Curvam lemniscatam a  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  pendentem perscrutari copi

この式に従う弾性曲線（→レムニスケート曲線）の研究を行う



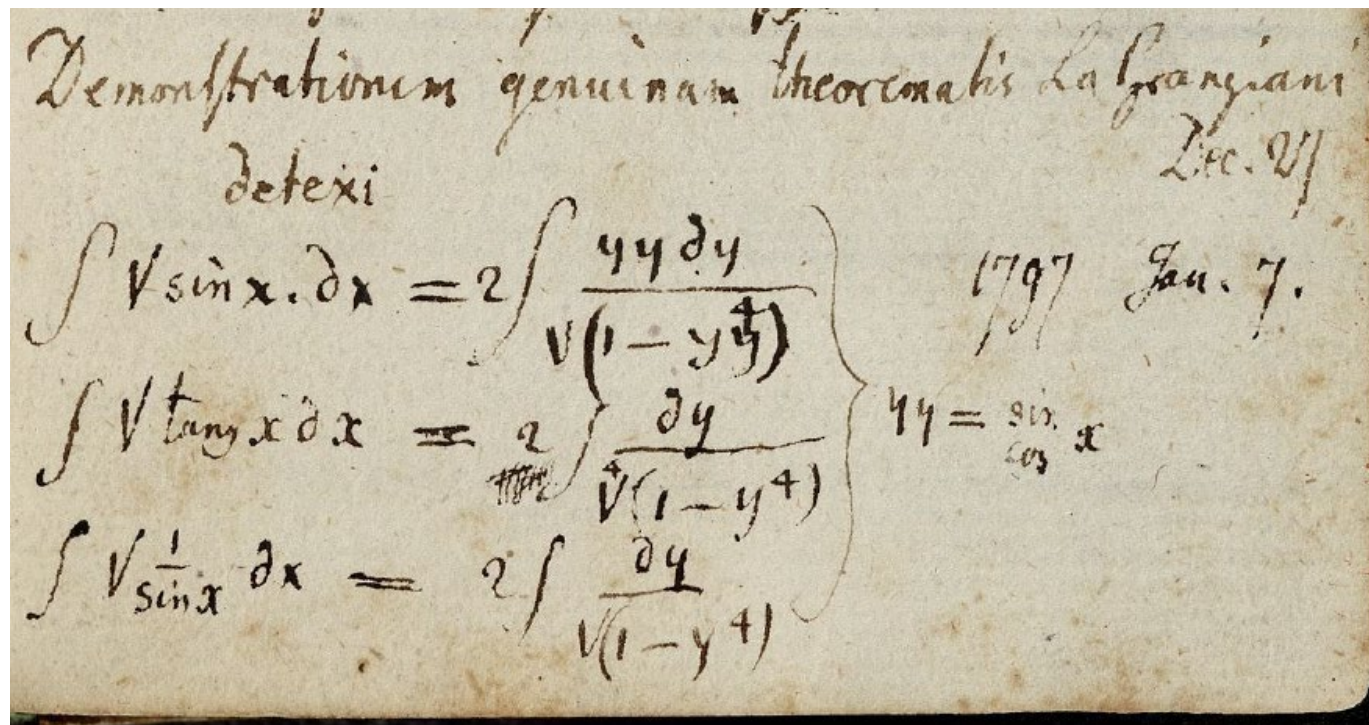
# Gauss 日記



Gauss 日記 1796年 (19歳) ~ 1814年



Gauss 1797 1 7, 長方形弾性曲線の高さ と長さ + ■ の記述

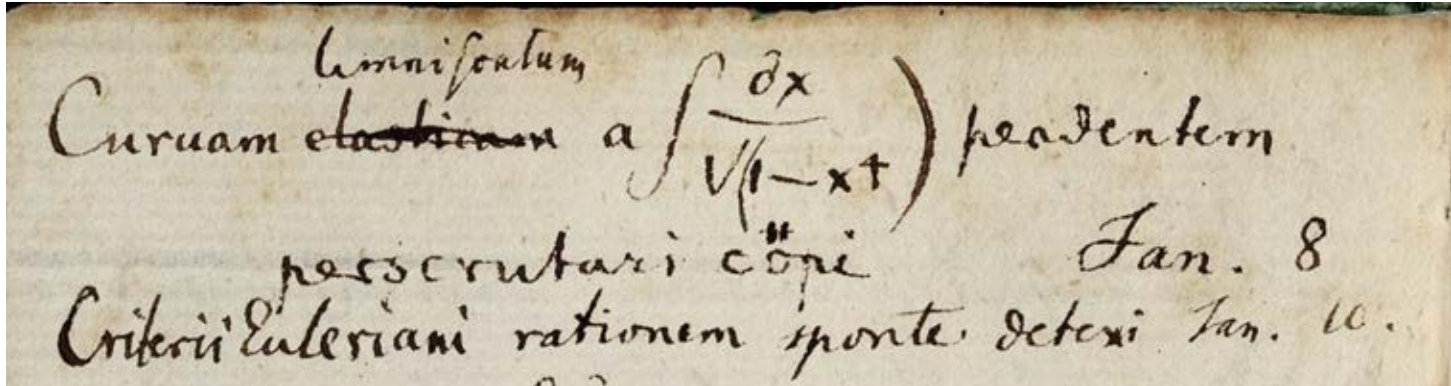


Cf. Eulerの長方形型弾性曲線方程式の記述 Methodues 1744

Species singulare nomen curvæ Elasticæ rectangulæ obtinuit. Erit ergo  $dy = \frac{xx \, dx}{\sqrt{(a^+ - x^+)}}$ , &  $ds = \frac{aa \, dx}{\sqrt{(a^+ - x^+)}}$ ; hoc igitur casu AD & AC ita se habebunt ut sit:



# Gauss 1797 1 8 日記, 弾性曲線の研究についての記述



Curvam elasticam a  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  pendentem perscrutari copi

Curvam lemniscatam a  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  pendentem perscrutari copi

この式に従う弾性曲線（→レムニスケート曲線）の研究を行う



# Gauss 1799 5 30, 算術・幾何平均によるレムニスケート周期の計算の記述

# Terminum medium arithmetico-geometricum  
inter 1 et  $\sqrt{2}$  esse =  $\frac{\pi}{20}$  usque  
ad figuram undecimam comprobavimus, quare  
demonstrata prorsus novus campus in analysi  
certo aperietur  
Br. Mai 30.

Cf. Eulerの長方形型弾性曲線方程式の記述 Methodues 1744

Species singulare nomen curvæ **Elasticæ rectangulæ** obtinuit. Erit  
ergo  $dy = \frac{xx dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ , &  $ds = \frac{aa dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ ; hoc igitur  
casu AD & AC ita se habebunt ut sit:

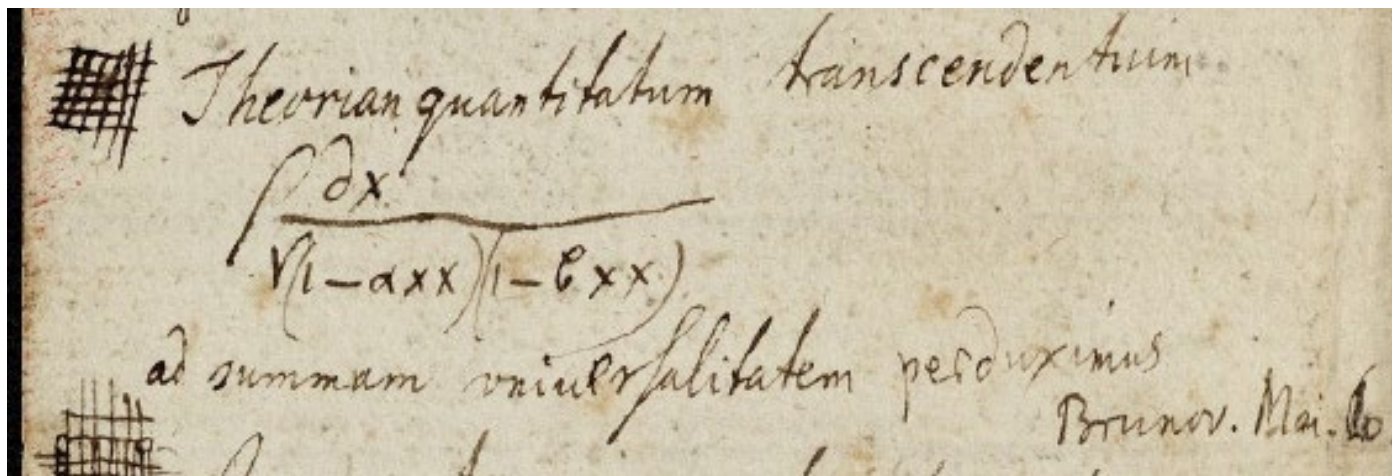
$$AC = f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{1}{8} + \&c. \right)$$

$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3 \cdot 4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5 \cdot 8} + \&c. \right)$$

hincque  $b = \frac{\pi aa}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1,1803206$ ; unde in numeris puris  
erit  $\frac{f}{a} = 1,311006$ , &  $\frac{b}{a} = 0,834612$ .



Gauss 1800 5 6, 一般の楕円積分について普遍性を発見したとの記述



# Gauss 1800 楕円関数の静サイン・ゴールドン方程式の双一次形式による テータ級数の同定

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu x^2)}}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \log x = -\frac{1}{x^2} + \mu x^2$$

$$x = P/Q \quad P'P' - PP'' = QQ, \quad Q'Q' - QQ'' = PP,$$

$$P = s - \frac{1}{6}(1+\mu)s^3 + \frac{1}{120}(1+4\mu+\mu\mu)s^5 - \dots,$$

$$Q = 1 + * - \frac{1}{12}\mu s^4 + \frac{1}{90}(\mu + \mu\mu)s^6 - \frac{1}{10080}(8\mu + 17\mu\mu + 8\mu^3)s^8 - \dots$$

静サイン・ゴールドン方程式

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \sin \varphi$$

← 静サイン・ゴールドン方程式  
振り子の方程式

← 広田の双一次形式と呼ばれるもの

←  $\sigma$ 関数の原型となるもの



De functione transcendente  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)(1-\mu xx)}} = \varphi$ , ubi statuimus  $x = f\varphi$ .

Ponendo  $\log x = y$ , habemus

$$\frac{x dy}{d\varphi} = \sqrt{(1-xx)(1-\mu xx)},$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{dx}{x d\varphi} \cdot \frac{dy}{d\varphi} - \frac{x dx}{(1-xx) d\varphi} \cdot \frac{dy}{d\varphi} - \frac{\mu x dx}{(1-\mu xx) d\varphi} \cdot \frac{dy}{d\varphi},$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{(1-xx)(1-\mu xx)}{xx} - (1-\mu xx) - \mu(1-xx),$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{1}{xx} + \mu xx.$$

Sit

$$\int \frac{d\varphi}{xx} = t, \quad \int \mu xx d\varphi = u,$$

eritque

$$\frac{dy}{d\varphi} = u - t.$$

Sit porro

$$\int u d\varphi = v, \quad \int t d\varphi = w,$$

eritque

$$y = v - w.$$

Faciemus

$$e^{-v} = P\varphi, \quad e^{-w} = Q\varphi,$$

$$PP' = P'P' - QQ, \quad QQ'' = Q'Q' - \mu PP.$$

$$P = \varphi - \frac{1}{2}(1+\mu)\varphi^3 + \frac{1}{12}(1+4\mu+\mu\mu)\varphi^5 - \dots,$$

$$Q = 1 + * - \frac{1}{2}\mu\varphi^4 + \frac{1}{8}(\mu+\mu\mu)\varphi^6 - \frac{1}{16}(8\mu+17\mu\mu+8\mu^3)\varphi^8 - \dots$$



# Gauss 1800 楕円関数の静サイン・ゴールドン方程式の双一次形式による テータ級数の同定

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu x^2)}}$$

静サイン・ゴールドン方程式

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \sin \varphi$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \log x = -\frac{1}{x^2} + \mu x^2$$

← 静サイン・ゴールドン方程式  
振り子の方程式

$$x = P/Q \quad P'P' - PP'' = QQ', \quad Q'Q' - QQ'' = PP,$$

← 広田の双一次形式と呼ばれるもの

$$P = s - \frac{1}{6}(1+\mu)s^3 + \frac{1}{120}(1+4\mu+\mu\mu)s^5 - \dots,$$

$$Q = 1 + * - \frac{1}{12}\mu s^4 + \frac{1}{90}(\mu + \mu\mu)s^6 - \frac{1}{10080}(8\mu + 17\mu\mu + 8\mu^3)s^8 - \dots$$

←  $\sigma$ 関数の原型となるもの

• 非線形微分方程式 → (広田) 双一次方程式 → テータ級数

(1970-1990: 可積分系の  $\tau$  関数の原型がここにある)

• 「Bernoulli-Euler-Lagrangeの非線形方程式 → 楕円関数研究」の精神を受け継ぎ、発展させている。



# Gauss 1825 弾性曲線方程式の変分法による導出

(1825: LegendreがEulerの業績を矮小化した楕円関数論を出版した年)

**Aufgabe.**

Zwischen zwei gegebenen Punkten soll eine krumme Linie gezogen werden

- 1) von gegebener Länge =  $S$ ,
- 2) von gegebenen Tangentenrichtungen im Anfangs- und Endpunkte,
- 3) von der Beschaffenheit, dass das Integral

$$\int_0^S \frac{ds}{\rho}$$

ein Minimum werde.

$\rho$  bedeutet hier den Krümmungshalbmesser,  
 $ds$  ein Element der Länge.

Aus den vorgeschriebenen Bedingungen folgt also leicht, dass

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi = 0$$

←静サイン・ゴルドン方程式  
振り子の方程式



Gauss 1827 8. 6. (Abelの初論文(1827. 9月)以前)

テータ関数P, Qを2つから4つP, Q, R, Sに拡張  
 (Werke 算術・幾何平均から始まる58頁の大作)  
 (所謂 lemniscate 関数の理論も記載)

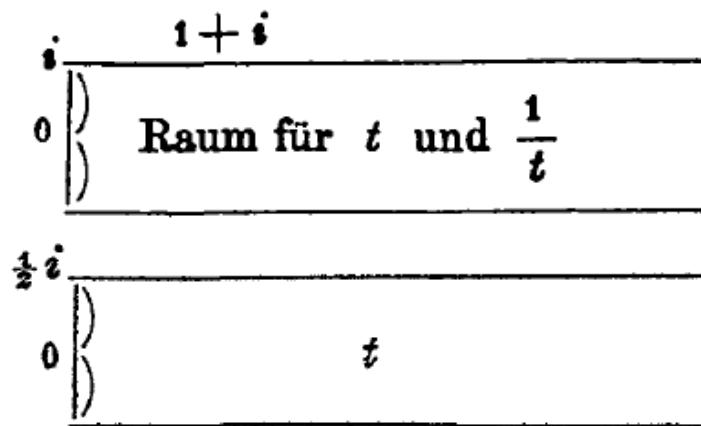
$$P(x, y) \cdot P(x, z) = P(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) + R(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

$$Q(x, y) \cdot Q(x, z) = P(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) - R(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

$$P(x, y) \cdot Q(x, z) = Q(xx, yz) \cdot Q(xx, \frac{y}{z}) + S(xx, yz) \cdot S(xx, \frac{y}{z})$$

$$R(x, y) \cdot R(x, z) = R(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) + P(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

Gauss 1827 モデュライの図の描画  $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau = \mathbf{Z}[\tau]$



Gauss 1827 8. 6. (Abelの初論文(1827. 9月)以前)

テータ関数P, Qを2つから4つP, Q, R, Sに拡張  
 (Werke 算術・幾何平均から始まる58頁の大作)  
 (所謂 lemniscate 関数の理論も記載)

$$P(x, y) \cdot P(x, z) = P(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) + R(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

$$Q(x, y) \cdot Q(x, z) = P(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) - R(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

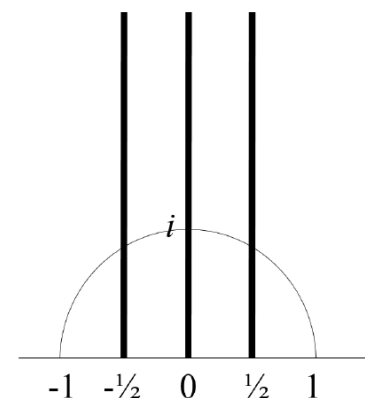
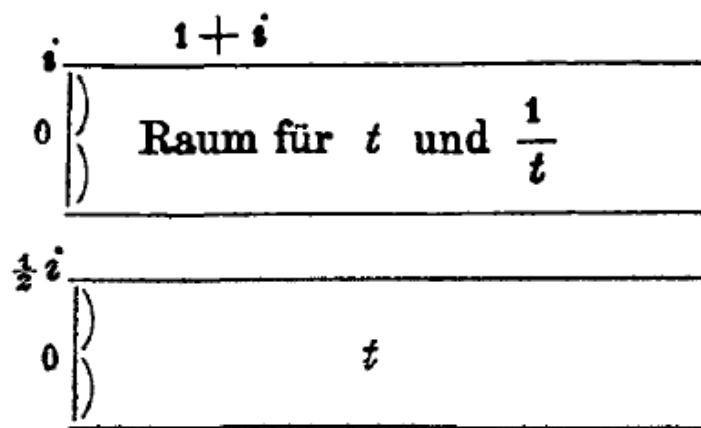
$$P(x, y) \cdot Q(x, z) = Q(xx, yz) \cdot Q(xx, \frac{y}{z}) + S(xx, yz) \cdot S(xx, \frac{y}{z})$$

$$R(x, y) \cdot R(x, z) = R(xx, yz) \cdot P(xx, \frac{y}{z}) + P(xx, yz) \cdot R(xx, \frac{y}{z})$$

Gauss 1827 モデュライの図の描画

$$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau = \mathbf{Z}[\tau]$$

現代的に見た  
弾性曲線のモデュライ



Gauss モデュライの図は、弾性曲線のモデュライに対応している





ガウス (1777-1855)

Gauss :

「算術を手本に諸科学を理解する」  
(シモベのように諸科学に寄与する)

- 算術でのGauss括弧で，望遠鏡の設計に応用  
( $SL(2, Z) \Rightarrow SL(2, R)$ )
- Gaussの和での環構造で，天体の軌道計算に応用  
(円分体，巡回群の誘導表現の応用)
- 連分数，Gaussの括弧による逐次近似を  
一次方程式の数値解法に応用  
(行列のレゾルベント (Gauss-Seidel法))
- 算術・幾何平均 → 楕円関数論 (弾性曲線論?)



# 算術 1801 p. 17, Gauss括弧

# ⇒ 光学 1840 Gauss括弧

+ C etc., breuitatis gratia ita eis designamus,  $A = [a]$ ;  $B = [a, c]$ ;  $C = [a, c, \gamma]$ ,  $D = [a, c, \gamma, \delta]$  etc. ). Iam proposita sit aequatio indeterminata  $ax = by \pm 1$ , vbi  $a, b$  positui. Supponamus, id quod licet,  $a$  esse non  $< b$ . Tum ad instar algorithmi noti, secundum quem duorum numerorum diuisor communis, maximus inuestigatur, formentur per diuisionem vulgarem aequationes,

$$a = ab + c$$

$$b = c + d$$

$$c = \gamma d + e \text{ etc.}$$

ita vt  $a, c, \gamma$  etc.  $c, d, e$  etc. sint integri positui, et  $b, c, d, e$  continuo decrescentes, donec perueniatur ad

$$m = \mu n + 1, \text{ quod tandem euenire debere constat.}$$

Erit itaque  $a = [n, \mu, \dots, \gamma, c, \alpha]$ ;  $b = [n, \mu, \dots, \gamma, c]$ . Tum fiat  $x = [\mu, \dots, \gamma, c]$ ,  $y = [\nu, \dots, \gamma, c, \alpha]$ , eritque  $ax = by + 1$ , quando numerorum multitudo est par, aut  $ax = est impar. Q. E. F.$

DISQUISITIONES  
ARITHMETICAE

D. CAROLO FRIDERICO GAUSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APUD CAROL. FLORIANOS, 1801.

## 算術でのGauss括弧を望遠鏡の設計に応用 (SL(2, Z) ⇒ SL(2, R))

### DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

$$\begin{aligned} \xi'' &= \xi' + u'b' \\ b'' &= b' + t''\xi'' \\ \xi''' &= \xi'' + u''b'' \\ b''' &= b'' + t''' \xi''' \end{aligned}$$

u. s. f., woraus erhellet, dafs  $b^*$ ,  $\xi^*$  linearisch durch  $b^0$  und  $\xi^0$  bestimmt werden, und dass, wenn man

$$\left. \begin{aligned} b^* &= gb^0 + h\xi^0 \\ \xi^* &= kb^0 + l\xi^0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

setzt, in der von Euler (*Comment. Nov. Acad. Petropol. T. IX*) eingeführten Bezeichnung sein wird

$$\left. \begin{aligned} g &= (u^0, t', u', t'', u'' \dots t^*) \\ h &= (t', u', t'', u'' \dots t^*) \\ k &= (u^0, t', u', t'', u'' \dots u^*) \\ l &= (t', u', t'', u'' \dots u^*) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Die Bedeutung dieser Bezeichnung besteht bekanntlich darin, dafs, wenn aus einer gegebenen Reihe von Gröfsen  $a, a', a'', a'''$  u. s. f. eine andere Reihe,  $A, A', A'', A'''$  u. s. f. nach folgendem Algorithmus gebildet wird

$$A = a, A' = a' A + 1, A'' = a'' A' + A, A''' = a''' A'' + A' \text{ u. s. f.}$$

man schreibt

$$A = (a), A' = (a, a'), A'' = (a, a', a'')$$

### Dioptrische Untersuchungen

von  
C. F. Gauss.

Der Königl. Societät übergeben 1810 December 10.

Die Betrachtung des Weges, welchen durch Linsengläser solche Lichtstrahlen nehmen, die gegen die gemeinschaftliche Axe derselben sehr wenig geneigt sind, und der davon abhängenden Erscheinungen, liess sehr elegante Resultate dar, welche durch die Arbeiten von Cotes, Euler, Lagrange und Möbius eruchelt scheinen könnten, aber doch noch mehreres zu wünschen übrig lassen. Ein wesentlicher Mangel der von jenen Mathematikern aufgestellten Sätze ist, daß dabei die Dicke der Linsen strachlässigt wird, wodurch ihnen ein ihren Werth sehr verringertes Character von Ungenauigkeit und Unzuverlässigkeit aufgespritzt wird. Oben ist already zu stellen, daß für manche andere dioptrische Untersuchungen, namentlich für diejenigen, wobei die sogenannte Abweichung wegen der Kugelform der Linsenflächen in Betracht gezogen wird, die sorgfältige Berücksichtigung der Dicke der Linsen sehr nützlich, ja notwendig wird, um sicherere und geschmeidigere Vorschriften für Überschliffe und erste Ausprobirungen zu gewinnen, wird man sich doch sehr einer solchen Aufsperrung aller Schärfe zu enthalten sehen wo es ohne allen oder ohne erheblichen Verlust für die Einseitigkeit der Resultate geschehen kann. Auf obigen dem mathematischen Sinn unangenehm herührenden Mangel an Präcision stösset wir nun, Theil schon bei der ersten Begriffsbestimmung der Dioptrik. Die Begriffe von Axe und Brennpunkt einer Linse stehen zwar mit Schärfe fest; allein nicht so ist es mit der Brenn-Mathem. Classe. I.



ガウス (1777-1855)

Gauss :

「算術を手本に諸科学を理解する」  
(シモベのように諸科学に寄与する)

- 算術でのGauss括弧で，望遠鏡の設計に応用  
( $SL(2, Z) \Rightarrow SL(2, R)$ )
- Gaussの和での環構造で，天体の軌道計算に応用  
(円分体，巡回群の誘導表現の応用)
- 連分数，Gaussの括弧による逐次近似を  
一次方程式の数値解法に応用  
(行列のレゾルベント (Gauss-Seidel法))
- 算術・幾何平均 → 楕円関数論 (弾性曲線論?)



# Gaussの楕円関数論からWeierstrassの楕円関数論へ



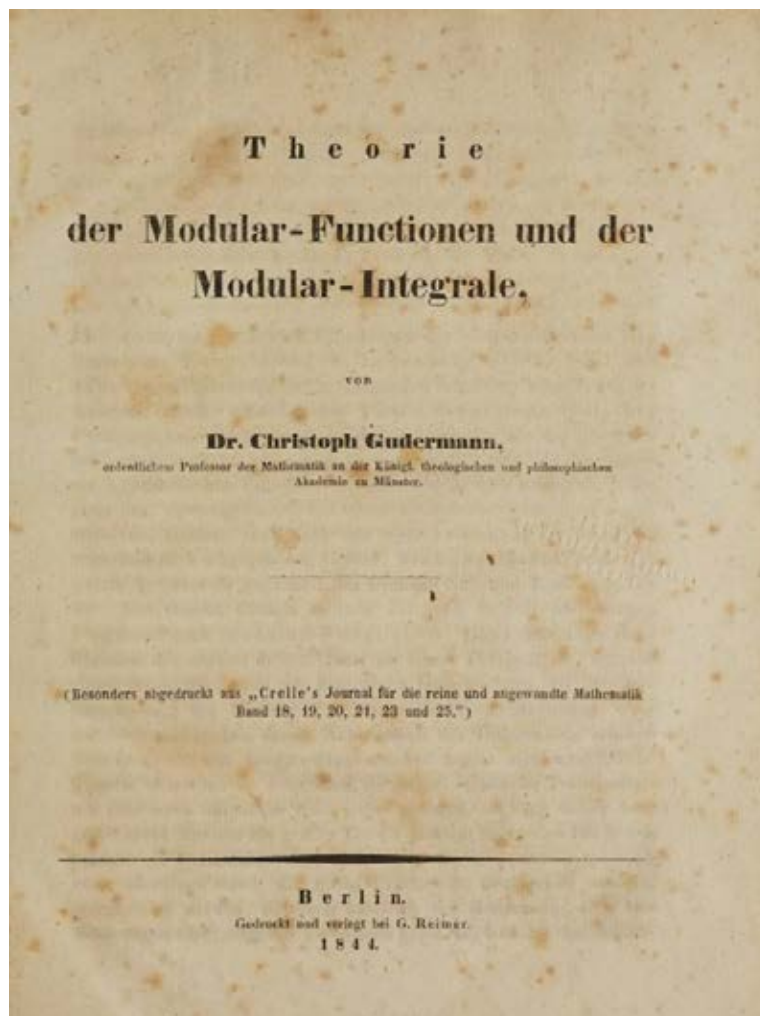
ワイエルシュトラス (壮年期：1815-1897)



ワイエルシュトラス (青年期：1815-1897)



# Gudermann (Weierstrassの師) 1838-43, 書籍1844



Jacobiの楕円関数,  
 $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$ を考察した  
一連の論文1838-43を  
1844年に書籍化した



Gudermann 1838 (論文では第3論文)

第1, 2論文を見たGaussからノートの開示があったと推測される

Differenziert man diese Formeln noch einmal, so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$5. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

$$6. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = -k^2 \operatorname{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u},$$

$$7. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} = -\operatorname{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 u},$$

$$8. \quad \frac{\partial^2 \log \operatorname{tn} u}{\partial u^2} = k'^2 \operatorname{tn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{tn}^2 u}.$$

Gudermann 1840

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\operatorname{Al} u}{\operatorname{Hl} u}, \\ \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\operatorname{Bl} u}{\operatorname{Hl} u}, \\ \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \cdot \frac{\operatorname{Gl} u}{\operatorname{Hl} u}, \\ \operatorname{tn} u = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{\operatorname{Al} u}{\operatorname{Bl} u}, \end{array} \right.$$

Gudermannのテータ関数  
Al, Bl, Gl, Hl



# Gudermann の慣習

## ・ 名前の短縮化

$$\sin \text{amplitudinis} \Rightarrow \text{sn}$$

$$\cos \text{amplitudinis} \Rightarrow \text{cn}$$

$$\Delta \text{amplitudinis} \Rightarrow \text{dn}$$

## ・ 重要関数のドイツ文字表記

und diese Formeln können auch also dargestellt werden:

$$7. \quad 'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'C(u + iK', a) - 'C(iK', a),$$

$$8. \quad 'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u + iK', a) - 'S(iK', a),$$

$$9. \quad 'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u + iK', a) - 'D(iK', a).$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln noch  $ai$  für  $a$ , so werden sie

$$10. \quad 'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'E(u + iK', a) - 'E(iK', a),$$

$$11. \quad 'E\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u + iK', a) - 'S(iK', a),$$

$$12. \quad 'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u + iK', a) - 'D(iK', a).$$



# Gudermann 1844 : eI関数 (Weierstrass ζ関数に相当)の研究

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{\partial \log Alu}{\partial u} &= elu - \frac{E}{K}u + \frac{k'cnu}{cncu} = E - elcu - \frac{E}{K}u + \frac{sncu}{snu}, \text{ also} \\
 &\quad \frac{\partial^2 \log Alu}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\text{tn}^2 u}, \\
 2. \quad \frac{\partial \log Blu}{\partial u} &= elu - \frac{E}{K}u - \frac{sn u}{snc u} = E - elcu - \frac{E}{K}u - \frac{k'cncu}{cnu}, \text{ also} \\
 &\quad \frac{\partial^2 \log Blu}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\text{tnc}^2 u}, \\
 3. \quad \frac{\partial \log Glu}{\partial u} &= elu - \frac{E}{K}u - k^2 snu sncu = E - elcu - \frac{E}{K}u, \text{ also} \\
 &\quad \frac{\partial^2 \log Glu}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \text{dnc}^2 u, \\
 4. \quad \frac{\partial \log Hlu}{\partial u} &= elu - \frac{E}{K}u = E - elcu - \frac{E}{K}u + k^2 snu sncu, \text{ also} \\
 &\quad \frac{\partial^2 \log Hlu}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \text{dn}^2 u.
 \end{aligned}$$

$$elu = \frac{E}{K} \cdot u + \frac{\partial \log Hlu}{\partial u}$$

← eI関数  
 ζ関数の原型  
 elasticaの形状？

Gaussからの示唆と同時期に導入





ワイエルシュトラス (壮年期：1815-1897)



ワイエルシュトラス (青年期：1815-1897)



# Weierstrass 1840 楕円σ関数の萌芽 (AI関数) の研究 (Gudermann)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} \\ \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} \\ \frac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \end{aligned} \right.$$

注) Weierstrass は, Abel のテータ関数による加法定理の論文を引用している

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \frac{S^2}{P^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2} \\ \frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \frac{R^2}{Q^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2} \\ \frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \frac{k^2 Q^2}{R^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2}. \end{aligned} \right.$$

$$\frac{P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2}{P^2} = \frac{S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2}{S^2}.$$

GaussのP, Q, R, S, 微分方程式 & 双一次形式が記載されている!

$$\operatorname{sn} u = \frac{P}{S} = \frac{\operatorname{Al}(u)_1}{\operatorname{Al}(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{Q}{S} = \frac{\operatorname{Al}(u)_2}{\operatorname{Al}(u)}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{R}{S} = \frac{\operatorname{Al}(u)_3}{\operatorname{Al}(u)}.$$

注) Frickeがこの対応に注意していた



# 静サイン・ゴルドン方程式 → 双一次形式 → $\theta$ 関数の展開係数の決定

$$Al(u) = 1 - C_2 \frac{u^4}{4!} + C_3 \frac{u^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} C_n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$C_2 = 2k^2$$

$$C_3 = 8(k^2 + k^8)$$

$$C_4 = 32(k^2 + k^6) + 68k^4$$

$$C_5 = 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6)$$

$$C_6 = 512(k^2 + k^{10}) + 3008(k^4 + k^8) + 5400k^6$$

$$C_7 = 2048(k^2 + k^{12}) + 17408(k^4 + k^{10}) + 49568(k^6 + k^8)$$

$$C_8 = 8192(k^2 + k^{14}) + 95232(k^4 + k^{12}) + 395520(k^6 + k^{10}) + 603376k^8$$

$$C_9 = 32768(k^2 + k^{16}) + 499712(k^4 + k^{14}) + 2853888(k^6 + k^{12}) + 5668096(k^8 + k^{10})$$

$$C_{10} = 131072(k^2 + k^{18}) + 2539520(k^4 + k^{16}) + 19097600(k^6 + k^{14}) + 38153728(k^8 + k^{12}) + 42090784k^{10}.$$

u. s. w.

## § 4.

Es mögen jetzt zunächst einige Formeln hergeleitet werden, welche für die weiteren Entwicklungen nöthig sind.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log Al(u)}{\partial u^2} = -k^2 \operatorname{sn} u^2 = \operatorname{dn} u^2 - 1$$

← **p 関数の原型**

folgt

$$(1.) \quad \operatorname{el}(u) = \int_0^u \operatorname{dn} u^2 \cdot \partial u = u + \frac{1}{Al(u)} \frac{\partial Al(u)}{\partial u},$$

← **el 関数  
と関数の原型  
elasticaの形状?**



## σ関数の系譜

Gauss 1827

P, Q, R, S  
( $\wp$   $\Omega$   $\mathfrak{H}$   $\mathfrak{S}$ )

Gudermann 1840 (出版)

A1, B1, G1, H1

Weierstrass 1840

$A1_1, A1_2, A1_3, A1$

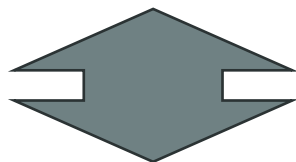
Weierstrass 185X

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma$



## Weierstrass 185X (1882)

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$



$$\left[ \frac{d\wp}{du} \right]^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\frac{d^2\wp}{du^2} = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

静KdV方程式



# Weierstrass 185X (1882)

## ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.\*)

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften  
vom 27. April 1882.)

### I.

Herleitung der Relationen, welche unter den Functionen  
 $\sigma(u|\omega, \omega'), \sigma_1(u|\omega, \omega'), \sigma_2(u|\omega, \omega'), \sigma_3(u|\omega, \omega')$   
und deren partiellen Ableitungen nach  $u, \omega, \omega'$  stattfinden.

Es werde irgend eine dieser Functionen bloss mit  $\sigma$  bezeichnet und

$$\varphi = -\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2}$$

gesetzt, so dass für die erste Function

$$\varphi = \wp(u)$$

und für  $\sigma_\lambda$ , wo  $\lambda$  eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet,

$$\varphi = \wp(u + \omega_\lambda)$$

ist. Dann hat man

$$(1.) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3,$$

$$(2.) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

←静KdV方程式



# Weierstrass 185X (1882)

Man kann also setzen

←  $\sigma$  関数の展開係数の決定

$$(M.) \quad \sigma(u) = e^{-\frac{1}{2}e_2 u^2} \sum_{m,n} b_{m,n} (3e_2)^m (2e_2)^n \frac{u^{2m+4n+1}}{(2m+4n+1)!}, \quad \text{wo } 2e_2 = 6e_1^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

und erhält aus (L.) zur Bestimmung der Coefficienten  $b_{m,n}$  die Recursionsformel:

$$(N.) \quad b_{m,n} = 4(m+1)b_{m+1,n-1} + (4n+1)b_{m-1,n} - (m+2n-1)(2m+4n-1)b_{m,n-1}.$$

Hier ist

$$b_{0,0} = 1, \quad \text{und } b_{m+1,-1} = 0, \quad b_{-1,n} = 0, \quad b_{m,-1} = 0.$$

非線形微分方程式  $\Rightarrow$  双一次形式 & 代数曲線  
 $\Rightarrow$  テータ級数

**Euler-Lagrange-Gaussの思想がWeierstrassの楕円関数論には息づいている**



## Weierstrass 1854 超楕円関数の研究

zu den Differentialgleichungen für die genannten Größen gelangen.

Für die *elliptischen* Functionen ist die Rechnung sehr leicht. Man hat nämlich, wenn  $x = \sin am u$  ist:

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Setzt man nun  $x = \frac{p_1}{p}$ , so ergibt sich

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

Diese Gleichung zerfalle man in zwei, indem man

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \quad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -\frac{k^2 p_1^2}{p^2}.$$

Gaussの方法を手本とした



## Schwarz (1843–1921) の楕円関数の講義録 (1893)

Die Function  $\wp u$ .

9.

Mit der Sigma-Function  $\sigma u$  ist die Pe-Function  $\wp u = \wp(u | \omega, \omega')$   
 $= \wp(u; g_2, g_3)$  durch die Gleichung

$$(1.) \quad \wp u = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma u = \frac{(\sigma' u)^2 - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u}$$

**Sigma-function  $\sigma$  と Pe-function  $\wp$  が現れている**



# Hecke (1887-1947) のノート (1907)

## ベルリン学派以外にも広がっている

Aus  $\sigma$  folgt

$$\xi(u) = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{d \ln \sigma u}{du} = \frac{1}{u} + \sum' \left\{ \frac{1}{u-n} + \frac{1}{n} + \frac{u}{n^2} \right\}$$

für

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 0, \\ \sigma'(0) &= 1, \\ \sigma''(0) &= 0, \\ \sigma'''(0) &= 0. \end{aligned}$$

und daraus

$$-\xi'(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u-n)^2} - \frac{1}{n^2} \right\}$$

diese Funktion ist offenbar doppelperiodisch, mit den Perioden  $2\omega_1, 2\omega_1'$ . Sie hat im Periodenparallelogramm nur den Pol zweiter Ordnung  $u=0$ . Daraus folgt, daß  $-\xi'(u)$  mit der Weierstrass'schen  $\wp$ -Funktion identisch ist:

$$\wp u = -\xi' u$$

Da

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + f(u),$$

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

also

$$\begin{aligned} \wp'' u &= \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma u}{u^2} \\ &+ \sigma u f'(u) + \sigma' u f(u). \\ &= \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{4}{3} \frac{\sigma'''}{\sigma} + \dots \end{aligned}$$



# Weierstrass の有理型関数と $\sigma$ 関数の遍歴

Weierstrass は Abel と師 Gudermann を心から尊敬した

	1840 楕円関数	1854 超楕円関数	遷移?	185?(1882) 楕円関数
有理型関数		al	$al$ $fp$ $al$ $yo$	$\wp$
シグマ関数	A1~S	A1	$a$ $a$ $a$ $a$ $a$ $a$	$\sigma \sim \mathcal{S}$



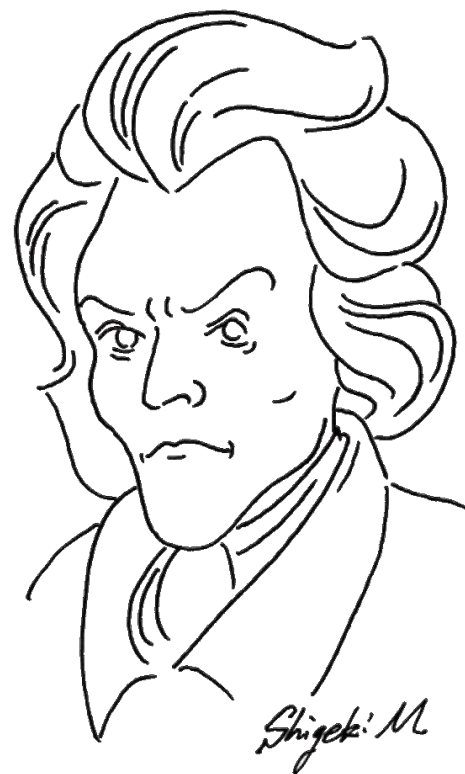
# Legendre → Abel → Jacobiの系譜



ヤコビ (1804-1851)



アーベル (1802-1829)



ルジャンドル (1752-1833)



Legendre (1752-1833) :

Lagrangeの楕円積分論を引き継ぎ、応用を見据えて、**楕円積分の積分表の書籍の出版**を目指した。

その目的のため**楕円積分を関数として捉え**、  
楕円積分の分類（同一性の議論、変換論）に注力（→Riemann面へ）

1811～19年『積分計算演習』出版  
1825年『楕円関数論およびEuler積分』第1巻

Euler積分: 
$$\int^x \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

恩のあるd'Alembertの楕円の弧長の研究(1746)を引用し、楕円関数と命名  
Eulerの楕円関数の業績を(理解できず?)切り捨て、Euler積分のみを取り上げた

1826年『楕円関数論およびEuler積分』第2巻  
1828年『楕円関数論およびEuler積分』第3巻

Poisson: 「Legendreは（肖像画などにより評価するより）自分の作品だけを取り上げてほしいという願望を持っていた」

（楕円積分で名を遺すことが目標であった？ ⇒ Eulerを過小評価(?) , Eulerの楕円の研究も無視し、d'Alembertが楕円関数の祖とした）

（Gaussは常にEulerを尊敬、評価していたのと対比されるべきこと）



オイラー, ヤコブ, ダニエル・ベルヌーイ  
・変分法・弾性曲線論  
・楕円積分 1691, 1744

ラグランジュ  
・弾性曲線論 (SG) 1770  
・楕円積分 1784

ガウス 弾性曲線論(SG)  
・微分方程式(SG)  
→ 楕円θ関数 1799

ワイエルシュトラス 1841  
・微分方程式 (SG)  
→ 楕円AI関数  
→ 超楕円AI関数

アーベル 1828-9  
・一般の代数曲線

ヤコビ 1835  
・超楕円関数論

ルジャンドル  
・第1~3種積分

アーベル 1827-9  
・楕円関数論

ヤコビ 1829  
・第1~3種微分  
→ 楕円θ関数

ワイエルシュトラスの  
楕円関数論

ワイエルシュトラス  
の代数関数論

1854  
リーマンの  
アーベル関数論

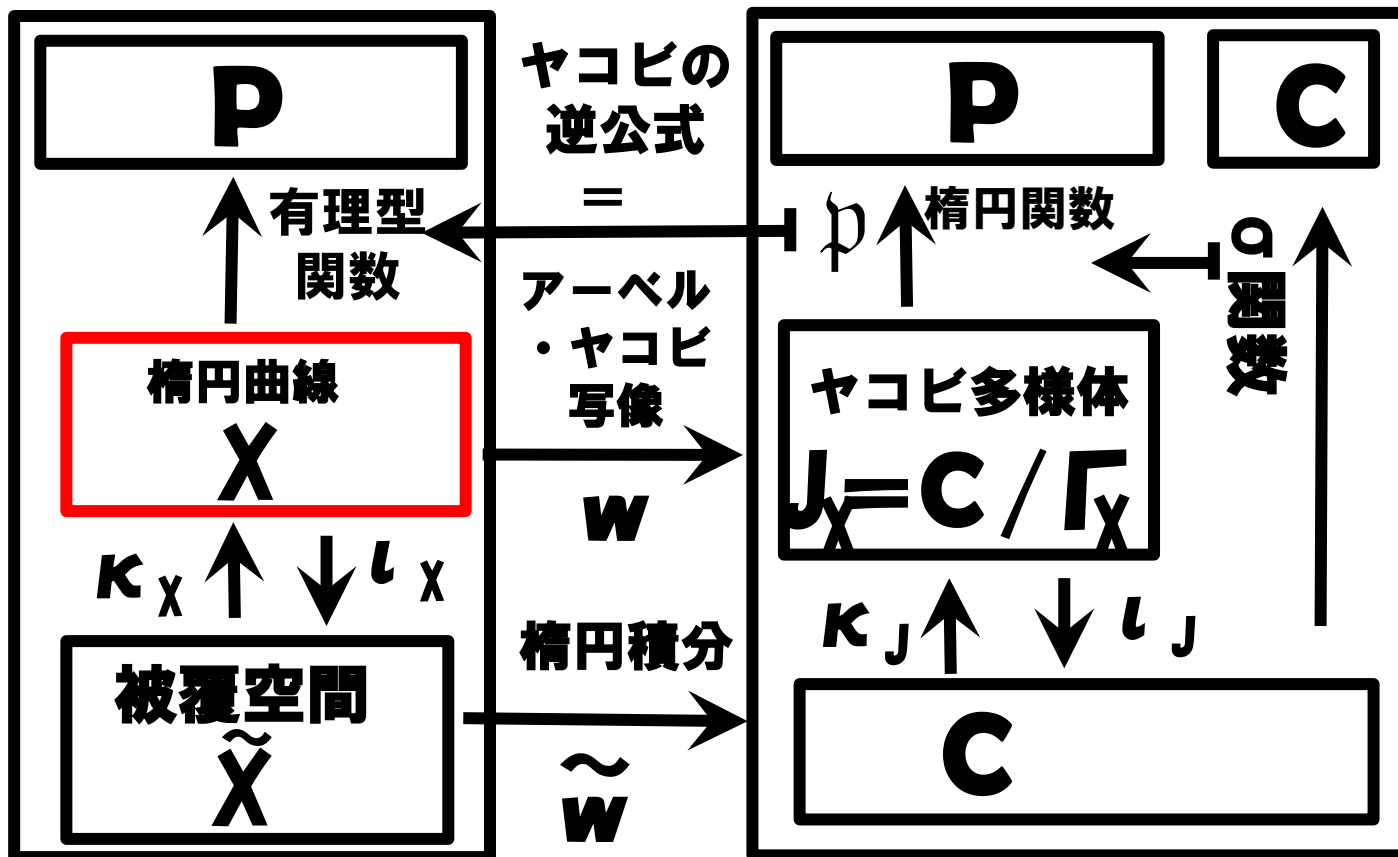
20世紀に受け継がれる

頓挫

20世紀に受け継がれる



# Euler-Gauss-Weierstrassのビジョン



- 同値性を持つ曲線群の中で**よい代表元**が全体を表現する  
( $\Leftrightarrow$  非線形微分方程式が系を表現する)
- 有理型関数はよい代表元において、その**展開係数まで具体的に定まる** (定めなければ、**弾性曲線は描けない**)



## Weierstrass → Schwarzへの手紙 (1875)

『私は、**函數論の諸原理を考究すればする程—そして私は絶えずそのことをして来たのですが—益々、これ等の諸原理は代數學的真理の基礎の上にたつてゐること、従つて、若し、逆に、代數學の簡單な基本的な定理を立證するために超限の助けを借りようとするならば、それは眞の方法ではないことをたく確信するに至つたのであります。そして、リーマンRiemannが、それによりて代數學的函數の幾多の重要な性質を證見した諸考察が、一見如何に深遠な議論のやうに見えても、このことは依然として眞であります。』**

ポアンカレ『**科学者と詩人**』（平林 初之輔訳）



- 現代的な楕円関数論は、Weierstrassの講義録を出発点としている。
- Weierstrassの楕円関数論は、Gaussの楕円関数論の礎の上にある。
- Weierstrassの楕円関数論の中心的役割を果たす  $\sigma$  関数はGaussのS関数から来ている
  - (非線形微分方程式  $\Rightarrow$  代数曲線, 双一次形式
  - $\Rightarrow$  テータ関数, 有理型関数の展開決定
  - 可積分系の研究で1970年以降に一部復興した
- GaussはEulerの弾性曲線の研究から影響を受けている  
(Bernoulli-Euler-Lagrangeは楕円積分の逆関数を取り扱った)
- これらはFagnano-Euler-Lagrange-Abel-Jacobiを中心とした楕円関数論史とは大きく異なるものである。



**弾性曲線のその後,**

**弾性曲線の励起状態は**

( $S^1$ の $R^2$ の等長埋め込みのモデュライ)

- **DNAの形状**
- **超楕円曲線の代数関数論**

( $S^1$ の超楕円リーマン面の実埋め込みとその被覆空間の代数関数)

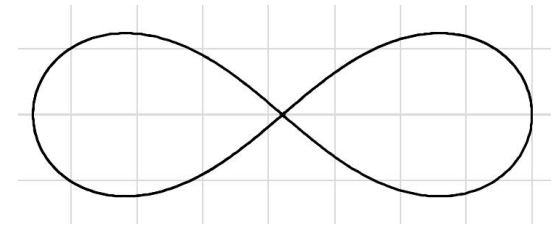
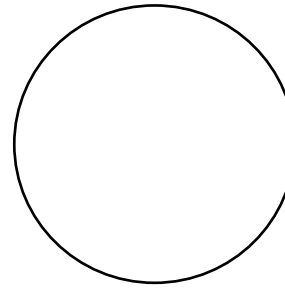
**に関わる**



# Euler's "ground state of elasticae" of genera **zero and one**

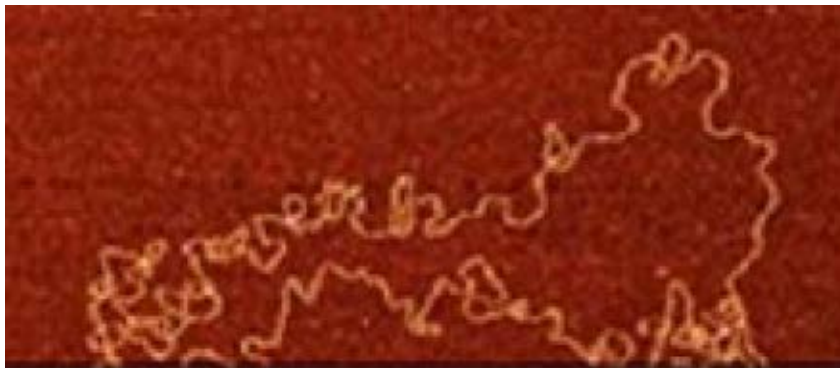


A.L.B.Pyne, et.al.,  
Nature communications  
(2021) 12:1053

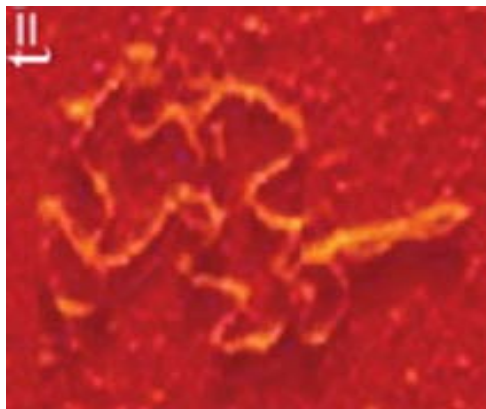


**Euler 1744**

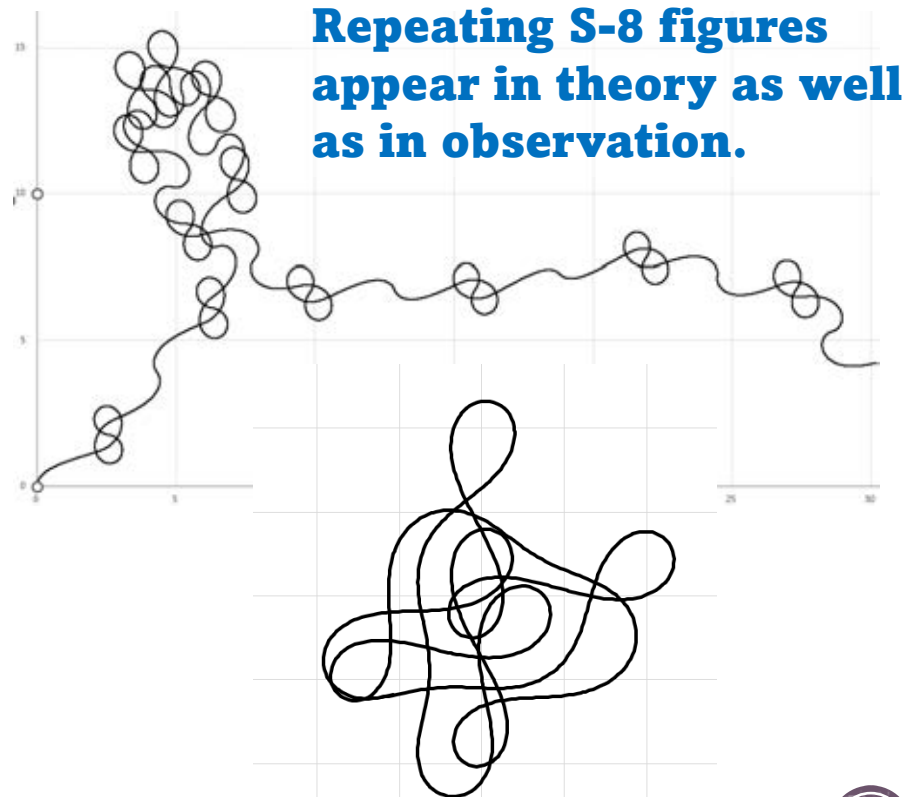
# Mathematical model of "excited elasticae" of **genus three**



A. Japaridze, et al., Nano Lett. **17** 3, (2017) 1938-1948



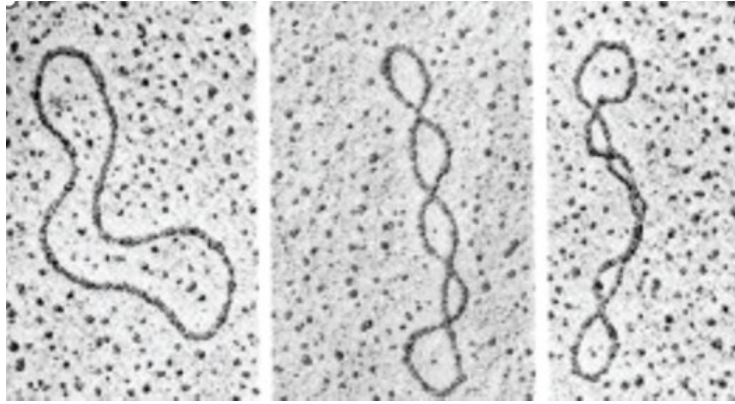
L. Alonso-Sarduy, et al., Nano Lett. **13**, (2013) 5679-5684



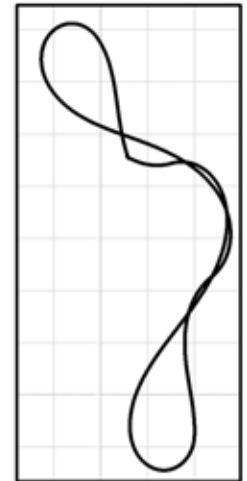
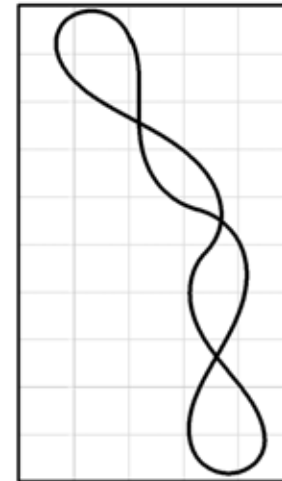
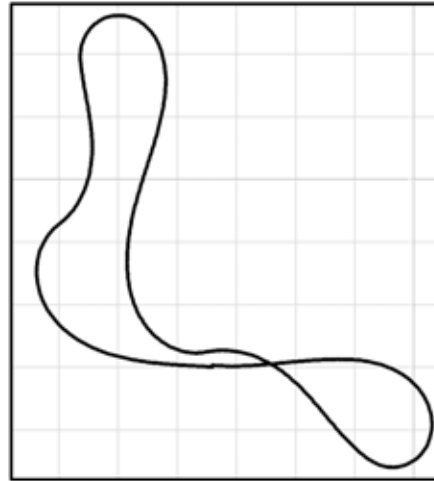
**S. Matsutani, Physica A 643 (2024) 129799**



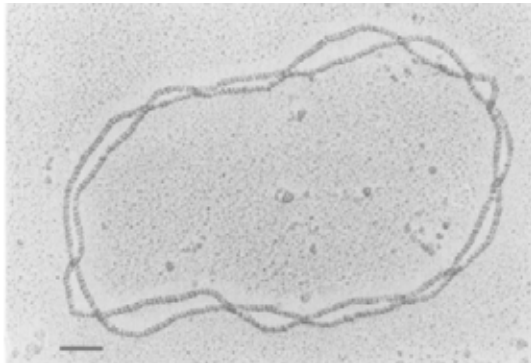
# Mathematical model of “excited elasticae” of **genus five**



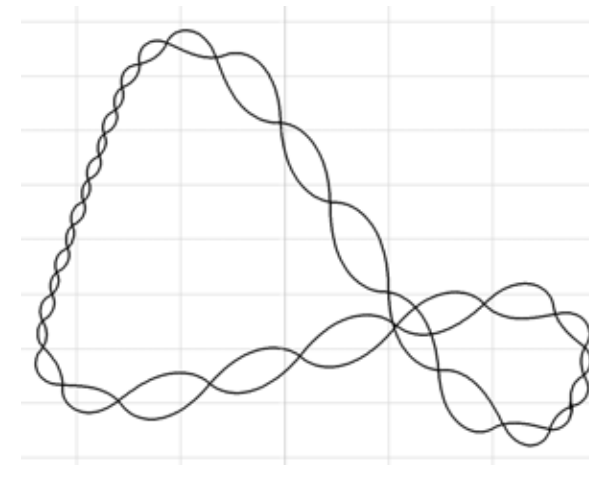
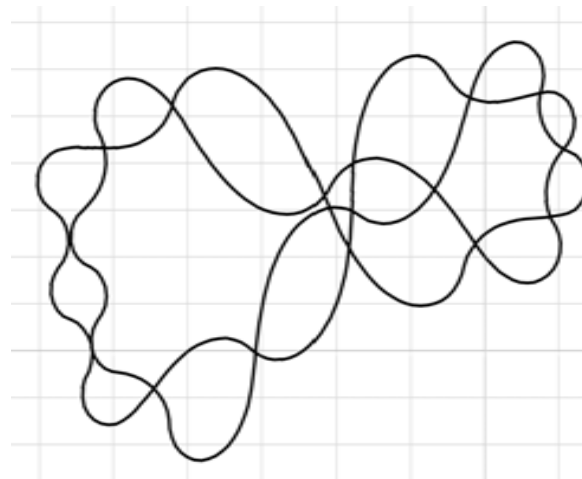
Electron micrographs of DNA (mini ColE1 plasmid dimer, 5kb) by Laurien Polder [A. Kornberg and T. A. Baker, *DNA Replication*, 2nd ed., W. H. Freeman & Co., 1992 Fig. 1-24 p. 36.



**S. Matsutani, 2025.8**



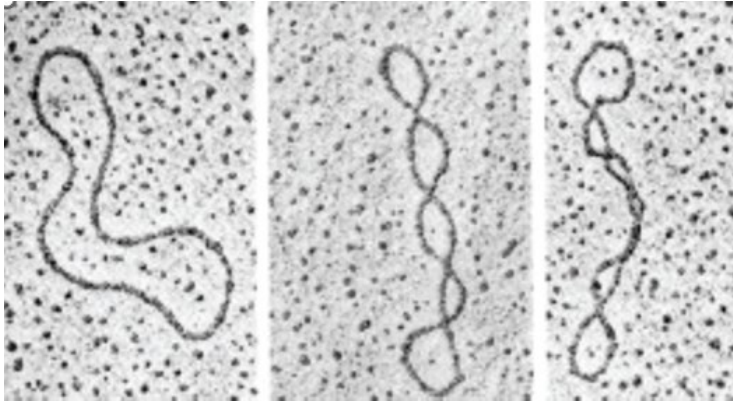
Spergler SJ, Stasiak A, Cozzarelli NR. 1985. *Cell* 42:325–334



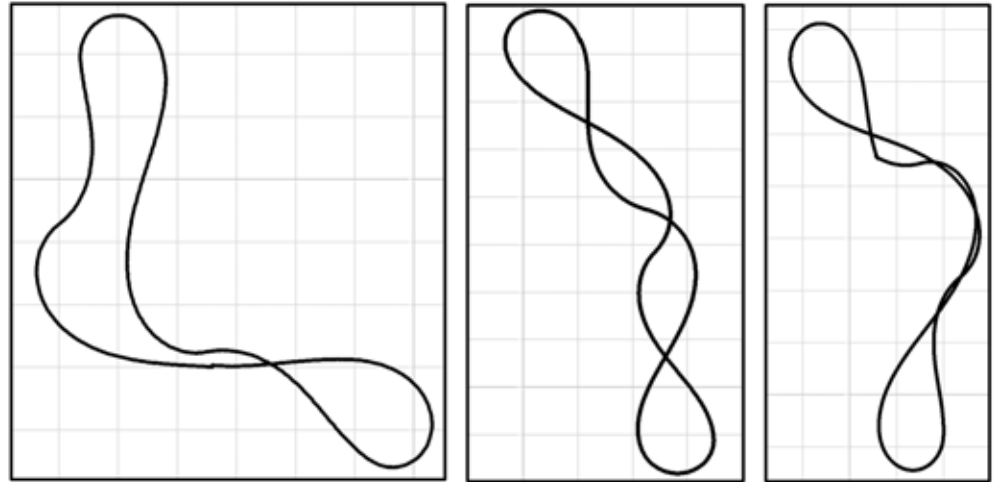
<https://arxiv.org/abs/2504.18285>  
**S. Matsutani, 2025.8**



# Mathematical model of “excited elasticae” of **genus five**

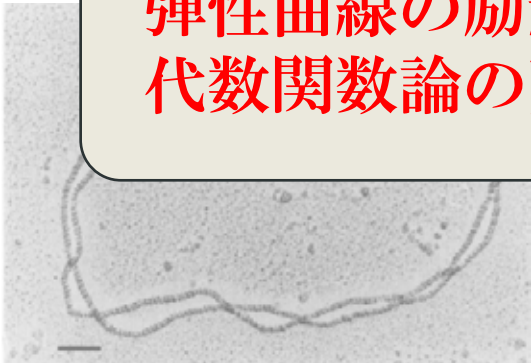


Electron micrographs of DNA (mini ColE1 plasmid dimer, 5kb) by Laurien Polder [A. Kornberg and T. A. Baker, DNA Replication, 2nd ed., W. H. Freeman & Co., 1992 Fig. 1-24 p. 36.

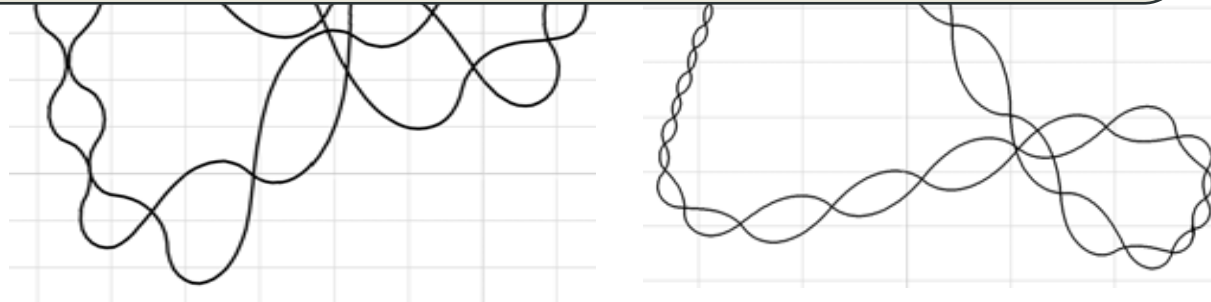


**S. Matsutani, 2025.8**

弾性曲線の励起状態(**DNA**の形状)を理解する為には、  
代数関数論の更なる発展が必須



Spergler SJ, Stasiak A, Cozzarelli NR.  
1985. Cell 42:325–334



<https://arxiv.org/abs/2504.18285>

**S. Matsutani, 2025.8**



# ご清聴ありがとうございました

